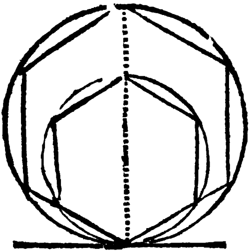
ELEMENTI
PIANI, E SOLIDI
D' EUCLIDE

All' Illustrissimo Signor Cavalière

NICCOLÒ
MARTELLI.



IN FIRENZE. 1734.
Nella Stampería di Bernardo Paperini.

Per il Carlieri, all' Insegna di S. Luigi.
Con Licenza de' Superiori.

ILLUSTRISSIMO

SIGNORE.

NELL' avere io dovuto compiacere a molti parziali amatori delle più ſublimi Scienze, con indurmi a dar nuovamente alle Stampe gli Elementi d'Euclide, presentati agli occhi degli Studiosi de' tempi suoi dal celebre Mattematico Vincenzio Viviani, non ho saputo con tale impresa non compiacere anche a me medesimo, sul riflesso, che ponendovi io la mano, poteva ella incontrare universale l'applaudimento, comecchè in assai poco numero rimasi erano gli Esemplari delle altre Stampe, richiesti alla giornata dagli Studiosi.

Se non che, immaginandomi, e conoſcendo io a ragione, che nel darla novellamente alla luce, era a me d'uopo il far sì, che riguardata ella foſſe parzialmente, e protetta dal benigno animo di un qualche illuſtre, ed erudito Perſonaggio, valevole per ogni capo ad accreſcerle il pregio, e l'applauſo, ho giudicato ben conveniente mio debito lo indirizzarla alla diſtinta Perſona di Voſignoria Illuſtriſſima, come quella, che inclinata in sua prima età ad assaporare con tanto, e sì ottimo gusto le Mattematiche cognizioni, promette a i suoi Genitori di giugner gloriosamente, ed in brevi passi ad una invidiabile perfezione nello studio delle Materie più scientifiche; E siccome il vivace ingegno, e l'attiva indole, che sì a buon tempo risplendono in Vosignoría Illustrissima, sono proprietà in Lei trasfuse da' suoi Maggiori, dotati di segnalatis-

sime

ſime prerogative, e tra-mandate in loro eziandío dagli Avi loro, i quali decorar ſeppero a gran ſegno la ſua antica Proſapia colle ſoſtenute primarie Dignità della Fiorentina Repubblica, e quindi colle meritate Sacre Porpore, e colle Prelature, le quali tuttora danno a Lei ſingolar luſtro nel vivente Illuſtriſſimo, e Reverendiſſimo Monſignor GIUSEPPE MARIA MARTELLI ſuo degniſſimo Zio, Arciveſcovo zelantiſſimo di Firenze, a me pure, anche per tal ſorte, diletta Patria, così ſcorgendo io, che in Voſignoría Illuſtriſſima vanno di pari agli aviti ſuoi talenti quelli eziandío della innata compitezza, e connaturale generoſità di animo in accogliere benignamente gli atti dell'altrui dimoſtranza di oſſequio, vò ugualmente animato, e confortato da una viva fiducia, che ſia ella per degnarſi di ammettere queſta mia, benchè piccola offerferta, come ne le ſupplico, ſotto il ſuo validiſſimo Patrocinio, onde a me ſi dia ſempre maggior campo di gloriarmi d' eſſere, quale ora umilmente mi atteſto

Di V. S. Illuſtriſſima

Devotiſs. Serv. Obbligatiſs.
Carlo Maria Carlieri.

Cum in omnibus Mathematis, tanquam planis, & lævibus speculis intelligibilium veritatis vestigia, & imagines appareant, maximè Geometria, quam Philo reliquarum Principem, & Metropolim vocat, excitat, & convertit intellectum veluti repurgatum, & paullatim a sensu liberatum.

Plutarch. Symp. 7. quæst. 2.

CARLO MARIA CARLIERI

ALLA

STUDIOSA GIOVENTU'.

Onciossiacosachè i princi- pj di ciascheduna Scienza riescano molte fiate duri, e malagevoli ad apprendersi, quindi è, a mio credere, che molti supponendosi ciò provenire dall'ordine dell'insegnarli, si sono col lor talento impiegati per renderli facili, e piani, proccurando di ridurli ora più brevi, e talora anche più distesi, con animo però sempre di farli riuscire, giusta lor possa, più chiari, e più ordinati. Laonde noi veggiamo tuttora venire alla luce nuove Grammatiche di ogni Lingua, nuove Rettoriche, nuovi corsi di Filosofia, e Teologia, nuove Introduzioni alle Leggi, e somimigliante ſpecie di Libri. E comecchè a molti più difficile ſembri, e più faticoſo all' intelligenza lo ſtudio della Geometria, non mancarono in varj tempi uomini, per altro grandiſſimi, che s' umiliarono a compilarne gli Elementi con ordine diverſo da quello tenuto già da Euclide, per vedere di rendere più appianata, e meno oſcura queſta ſcienza

Che mena dritto altrui per ogni calle.

Ma ſiccome noi veggiamo ſpeſſe volte intervenire a chi dalla chiara, e sfolgorante luce del Sole in una ombroſa, ed oſcura abitazione trapaſſa, che niuna vede di quelle coſe vedute da coloro, i quali ſono quivi, per qualche tratto di tempo, a quel fioco lume aſſuefatti, così appunto molte volte è addivenuto, che quello, che a' loro intelletti, di quella ſcienza, che a ſpiegare imprendevano, poſſeditori perfetti, lucido, e chiaro appariva, e chi di nuovo in eſſa s' introduceva, queſto novello ſentiero riuſciva viepiù ſcuro, ed intricato di quello, che ad altri foſſe ſembrato il primiero, e di maggiori difficoltà attorniato, per felicemente giugnere a quel termine, che egli ſi erano nell' animo lo-

ro

ro prefisso. Laonde da' savi uomini è stato giudicato bene a' primi fonti, da' quali eramo lungamente deviati, aver ricorso, e sulle loro bene indirizzate vestigia alla sapienza incamminare coloro, *che altro contento, che imparar non provano*. Che però nel dare io alle stampe per comodo vostro, studiosa Gioventù, gli Elementi della Geometria, ho stimato bene prendere quei medesimi, che alcuni anni sono furono da Jacopo mio Padre pubblicati, cioè a dire, quelli appunto, che per un corso lunghissimo di tanti Secoli ci ha tramandato Euclide. E se ad alcuna Dimostrazione, reputata universalmente oscura, ve ne ho aggiunta altra del Torricelli, o del Viviani, non è però, che io abbia tralasciato quella d'Euclide, acciocchè ognuno a suo senno prenda quale di esse gli aggrada. Per la cagione medesima nel fine del primo Tomo ho posto il quinto Libro, così come in Euclide si trova, quantunque nel principio dell'altro Tomo sia collocata la Scienza universale delle Proporzioni, la quale nell'ultimo di sua vita avendo in un Dialogo presa a spiegare il lucido, ammirabile, e sempre glorioso in-

ge-

gegno del Galileo, fu poi in tal forma ridotta da quel gran Geometra del Viviani, che tutto il suddetto quinto Libro comprendesse; ma con una chiarezza infinitamente maggiore, perlochè comunalmente terminata la spiegazione del quarto Libro al Tomo secondo si suol trapassare, tralasciato il quinto disteso da Euclide, che perciò superfluo parendo, e di veruno uso, potea forse non istamparsi, se non si fosse alla venerabile antichità, e a' primi Maestri nostri avuto riguardo. Si sono quindi aggiunti varj sentimenti d'uomini sapientissimi in commendazione della Geometría, e circa alla grandissima, e inesplicabile utilità della medesima, in gran parte raccolti dal Viviani, acciocchè, se di essa vi innamorerete venga questa mia impresa ad incontrare maggiormente il vostro favore, lo che spero, che sia per seguire qualora a sì nobile, ed eccellente studio con tutto il talento dell'animo attendiate; E vivete felice.

DIGRESSIONE
DEL
VIVIANI

Scritta in commendazione della Geometría, cavata dal Ragguaglio dell'ultime Opere del Galileo *a car.* 89.

MA quì in grazia mi sia permesso, digredendo alquanto dal racconto, di far cuore al Giovane studioso, che in mancanza d'un Direttore (il qual però sul principio io non biasimo a proccurarselo) voglia provarsi a veder da se stesso il primo Libro almeno d'Euclide, d'esposizion comentata la più chiara, e diffusa, che egli trovi, quale-

le sarebbe quella del Padre Clavio; avvertendolo, che dopo la reminiscenza delle notizie comuni, che vi si premettono, l'esplicazione de' termini da usarvisi, e l'approvazioni delle domande concedibili, che vi si fanno, egli segua per appunto quell'ordine, e non trapassi cosa, che più che ben non intenda; nè sul principio del cammino, benchè tediato, o stanco gli paja d'esserne, si abbandoni; nè si curi per ancor di sapere a che sia buona la Geometría: ma se pure ne è curioso, domandine al Galileo, il quale o col suo solito piacevol motto gli dirà, che dalle dimostrazioni della Geometría, attenenti alle Misure, a' Pesi, ed a' Numeri, s'impara a misurare i Goffi, a pesar gl'Ignoranti, ed a numerar gli uni, e gli altri: *o pur rispondendo sul serio, gli affermerà, non potersi comprendere a che ella sia buona, se prima ella non si gusta, e dopo gustata, ella stes-*

ſteſſa colle ſue tante, e sì evidenti dimoſtrazioni daſſi a conoſcer per buona a tutte le coſe. Ma ſe per avventura una sì fatta Propoſizione gli pareſſe incredibile, ed inſieme troppo preſuntuoſa, in queſto caſo il medeſimo Galileo s'ingegnerà d'inſinuargliene la credenza col proporli que' molti, e variati colori poſti in confuſo ſopra una tavolozza, i quali, da chiunque non ne vide, e non ne ſeppe mai l'uſo o ſarebber creduti tanti piccoli ammaſſamenti di ſozza materia, inutile, e da doverſi trar via, o al più buoni a far apparire una ſuperficie roſſa col roſſo, gialla col giallo, e bianca col bianco; e nè mai gli caderebbe in penſiero, che dar ſi poteſſero al Mondo uomini di tal induſtria, e perizia, i quali con quelli ſteſſi colori aveſſero a ſapere, e potere al vivo rappreſentare con ammirabil vaghezza l'immagine di tutte le coſe viſibili, non ſolo delle fabbrica-

te dall' Arte, ma delle create dalla Natura, e quelle ancora d' ogni più ſtrana grotteſca, o chimerica fantasía, ancorchè ſognataſi.

Su dunque, il Geometra principiante, a buona fede, e ſenza cercar più oltre, con generoſa riſoluzione, e con paziente aſſiduità ſi oſtini pur di veder tutto, e di ben intendere quel piccol Libro (ſiccome io l' aſſicuro, che gli ſortirà) ed oſſervi allora, s' egli ſi ſente invogliato, o nò di proſeguir la navigazione intrapreſa; quando che nò, torni al lido, che queſto Mare al certo non è per lui; all' incontro ſe sì, vi s' inoltri pure, imperciocchè non al termine del cammino, come è ſolito negli altri Studj; ma fin per via s' avvedrà, che la Geometría è una chiariſſima face, e ſicura guida ad ogni ſorta d' erudizione, e che per eſſa riſveglianſi gli animi addormentati, ed aſſottiglianſi gli ottuſi ingegni; onde ſi

fan-

fanno più veloci, e più atti a penetrare, e comprendere, come è forza, che provi chiunque con essa terrà commercio, a cagione del continuo esercizio di concludenti discorsi, che far conviene in trattando seco. Di quì è, che altrettanto vero, quanto plausibile osservai sempre quel saggio detto pubblicato da me, come del mio Sovrano Maestro; che La Pietra Lavagna, sopra di cui si disegnano a' Principianti le Figure Geometriche, è la Pietra del Paragone degl'Ingegni, *vedendosi per prova continuamente, che quei, che reggono a tal cimento, riescono a tutta bontà in ogni altra facultà, e in qualunque maneggio, al quale intendano di applicarsi. Questa verità fu così ben conosciuta dal Divino Platone, che nell' instituire l'ottima Repubblica, lasciò scritto non esser veramente sì facile, ma non però fuor di proposito il credere, che le Scienze Mattematiche servano di strumen-*

menti per mandar giù le catteratte, che si parano davanti agli occhi dell' Anima ragionevole, e che questi, che dianzi trovavansi immersi in una foltissima caligine d' ignoranza, e per così dire, soffogati, anzi spenti dagli altri studj, ed esercizj, mediante poi il nuovo lume, ed il nuovo calor della Geometria, si ravvivino, e si riaccendano; e che piuttosto, che mille occhi del corpo, assai più importante sia il custodire quelli dell' animo, per mezzo solamente de' quali ci vien conceduto il rimirare, ancorchè remotissime, le occulte verità, che la sola Geometria ci disvela. Questa, o Giovane generoso, essendo una cognizione, non di quello, che or va, ed or viene, ma di quello, che è in un modo sempre, nè mai si muta, può sola condurti al prezioso conseguimento del vero, e prepararti l' anima alla contemplazione della Filosofia naturale, che il mio acutissimo

Lin-

Lince non vide scritta altrove, che in un solo, ma però vastissimo Libro, quale è quello dell' Universo. Questa, *dicev' egli*, non vi è distesa con altro alfabeto, che di Figure della Geometría, nè con altri principj, e ragioni dimostratavi, che Mattematiche.

Or da sì autorevoli sentenze maggiormente eccitato il novello Navigante dia pur libere velo al prospero vento, da cui sente portarsi per quel piccolo seno degli Elementi Geometrici, perchè guidato dall' infallibil Nocchiero della Ragione, e colla propria accortezza scansati que' pochi scogli, che nel passare al breve tratto de' primi Scrittori Classici egli incontrasse, scoprirà lieto nuovi Mondi, e s' approderà in Terra ferma da niuno altro termine circonscritta, sempre verde, e feconda d' innumerabili, incognite, nè per altra via penetrabili verità, e in breve accorgerassi per mezzo *ancora della Geometría poter trapelare agli occhi foschi delle nostre menti qualche raggio del* SOMMO SOLE, *per cui, additandocisi il dritto sentiero alla di lui cognizione, confessar dobbiamo in una Bontade, e Provvidenza infinita l'Onnipotenza del* CREATORE, *il quale, eziandío nell'interminato, è profondo abisso delle proprietà Mattematiche, mercè*

Dante Par. Canto 22.

La verità, che tanto ci sublima,

ci fa rimirar più d'appresso l'immensità di sua incomprensibil Sapienza;

Canto 19.

E quinci appar, ch'ogni minor Natura
E' corto recettacolo a quel Bene,
Che non ha fine, e se in se misura.

Che che di Scienze sì nobili scioccamente si ciarlino cert'uni aggbiacciati di dentro, e di fuor caldi, i quali tuttochè privi di simili cognizioni, e forse ina-

inabili a capirne i primi principj; ma sopra tutto come di lor natura in sommo grado superbi, presuntuosi, e gonfi di quello, che essi chiamano sapere, arrecandosi a gran vergogna, e direi anche a scrupolo, s' io non sapessi, che e' si fingono quei, ch' e' non sono, d' aver talvolta, interrogati, a dar quell' onorata, ingenua, e commendabile risposta, che spesso udii profferire dal mio saggio Maestro, cioè Questa è una di quelle tante, e tante cose, ch' io non sò; e *talvolta*, questa è una di quelle tante cose, ch' io sò di non sapere, *sotto il manto di simulato zelo, coll' autorità, ch' e' non hanno, ma ch' e' si pigliano, vanno in congiunture opportune insinuando simili studj esser pericolosi, e d' impedimento all' acquisto di quel Sommo Bene, al quale, sopra ogni altra cosa, aspirar dobbiamo; per introdurre così bel bello, ed incarità il disprezzo, e l' odio* *verso quel di sublime, e di recondito, ch'essi ignorano, ed accrescere intanto la stima, e 'l credito a quel di abietto, e di popolare, che anche e' si presumono di sapere. Ma dicanmi, su quai fondamenti insurgono questi a detestare ciò, che mai non intesero, mai non conobbero, mai non assaporarono? Forse muovonsi dagli esempli d'aver i Mattematici co' lor Dogmi, co' lor Assiomi, e colle tante loro Dimostrazioni seminate zizzanie, sedotti Popoli, ed infettate Repubbliche, Provincie, e Regni? e pure per quant'io lessi non trova' mai, che alcuno de' tanti perfidi Innovatori Mattematico fosse; e che di Angeli, Triangoli, Coni, e Piramidi, che sono le acute armi sue, si valesse. Chi poi, e quali e' fossero, non saprei dirlo; ma le Storie pur troppo lo diran loro. Io so ben questo, che in ogni tempo le Scienze Mattematiche furono accolte, favorite, e protette, ed an-*

ancor di proposito attentamente studiate, non solo da' Principi, e da' Monarchi, ma eziandío da' Supremi Capi del Cristianesimo, e da' Santissimi Padri in quelle versatissimi magnificamente esaltate, e fin coll' Opere loro illustrate, e più volte promosse da' Sacratissimi Porporati, e di continuo professate da' Religiosi di risulgente lustro nella Chiesa Romana, ma in ispecie da' Seguaci del ferventissimo Ignazio, nella di cui inclita Compagnía, se non avesse fiorito sempre, quasi che per natural discendenza, numerosa serie di Geometri, e Teologi insieme celebratissimi, che quì lungo sarebbe il ridirli (tralasciati tanti altri Mattematici, viventi in essa, di chiaro nome) il solo esempio dell' insuperabile Ingegno del sapientissimo, e candidissimo Padre Onorato Fabbri colle tante sue famose Opere e Teologiche, e Fisiche, e Mattematiche di salda, e di singolar dottrina ripiene; e (tra *i Religiosi al Secolo di rinomata venerazione) il solo, per meriti, eminentissimo Signor Abate Michel Angelo Ricci, onor del Secolo presente, vera Idea di sincerissima integrità, come nobile Professore di ogni più grave, e profonda letteratura, e come Geometra di soprumana inventiva, dovrebbero pur esser valevoli a confonder Genti di così mal talento, e ad attutire le lor malotiche lingue. Ma non ostante così degne testimonianze l'atra Ipocrisia di Costoro, d'apparente candor travestita a tal segno arriva, che anche gl'induce a manifeste, ed esorbitantissime contradizioni a' lor medesimi detti, poichè pronunziando ad ognora colla lingua almeno, se non col cuore, che tutte le Fatture di DIO, ed i Cieli in particolare cantano l'immensa gloria di quello, che in loro si vede scritta la Maestà Sua a caratteri di luce, e che quivi dobbiamo leggerla; accanto, ac-*

canto vanno insinuando per degne d' esser proscritte le Mattematiche tutte, ed in conseguenza la venerabile Astronomia, il di cui sublime, e singolare officio si è il richiamar l' Anime di noi Mortali al riconoscimento di lor alta origine, e con liberarle dal basso carcere di questa Terra, sull' ali della Geometria sua Nutrice, e dell' Ottica, e dell' Arimmetica sue inseparabili compagne, trasferirle colassù a contemplar con indicibile stupore per entro l' immense, e lucide Regioni del Cielo quegl' innumerabili Mondi con magistral simetria collocativi d' un ordinatissima confusione; anzi par seminati, o gettativi con generoso disprezzo per mano prodiga del lor medesimo CREATORE.

Ma qui si avverta, che in celebrando l' Astronomia, e la Mattematica, io non ebbi in considerazione la professsion di coloro, de' quali scrisse Tacito, Genus Hominum Potentibus in-

Nelle Istorie lib. 1. fidum, sperantibus fallax, quod in Civitate nostra & vetabitur semper, & retinebitur. *Non intesi parlar di quei, che appresso l'indotto Volgo, colle vane loro superstizioni, e falsi indovinamenti si usurpanono indegnamente il nome degnissimo di Mattematico, e indifferentemente confusero l'Astronomia coll'Astrologia. Non intesi, dico, degli Astrologi giudiciarj, obbrobrioso avanzo di que' Caldei, che appestarono già il Mondo, e come contagiosi, e malefici, fin dalla cieca Gentilità con replicate leggi sbanditi furono dall'Italia, ed in ogni tempo dichiarati meritevoli di severissime punizioni, e contro de' quali ancora fulminarono rigorose, non men che giuste censure, i Sacrosanti Decreti de' Romani Pontefici, ammaestrati, mi cred'io, dal* DIVINO SPIRITO, *che, se*

Eccle-siaste c. 10. Ignorat Homo, quid ante se fuerit, & quid post se futurum sit ei, quis poterit judicare? *Io*

solo

solo intesi, ed intendo di commendare i Mattematici speculativi, indagatori delle mirabili proprietà della quantità continua, e de' numeri. Intendo esaltar gli Astronomi, che hanno per oggetto i moti, i tempi, le grandezze, le figure, e le distanze delle più nobili Creature della ONNIPOTENZA INCREATA. *Gli uni, e gli altri di questi col proporci le maraviglie del Cielo, e della Natura, ci eccitano ad ammirar la grandezza di* DIO, *il quale, quasi dissi occupata sempre in geometrizzare, cioè a dire, ne i ben proporzionati lavori delle infinite, ed ammirande verità, che ci maneggia, per via di quei pochi, e menomissimi ritagli, che di lassù ce ne cadono fralle mani, ci fa riconoscere la sua interminata Sapienza, e ci dimostra la misera nostra ignoranza, obbligandoci a confessare:* Quod omnium Operum DEI nullam possit Homo invenire ra-

rationem eorum, quæ fiunt sub Sole, & quantò plus laboraverit ad quærendum, tantò minùs

Sap. cap. 8. inveniat, etiam si dixerit Sapiens se nosse, non poterit reperire.

Or non son questi, della cognizione di DIO, e di se stesso, acquisti di tesori assai più preziosi di quelli, che possan mai riportarsi da qualunque più avventurosa navigazione? Ed in vero, che per giugnere a conseguirli (fuor delle soprannaturali Scienze riservate a' supremi Padri, ed a' sommi Teologi dalla DIVINITA' illuminati) non vi è mezzo più atto, nè più potente della Geometría, Amica giurata della Natura, e gratissima a DIO, e per le di cui mani esso IDDIO Omnia in

Sapienza cap. 11. Mensura, & Numero, & Pondere dispofuit, *Che se una volta Costoro si fossero risoluti di cominciare a addomesticarsele, averebbero ben compreso (come ne avvertì loro il mio gran Ga-*

li-

lileo) che quella vana presunzione, che dianzi avevano d'intendere, e di saper tutto, non veniva da altro, che dal non aver mai saputo, nè inteso nulla, e dopo avere sperimentato una sol volta ad intender perfettamente una sola cosa, e gustato veramente com'è fatto il sapere, conoscerebbero, che, dell'altre conclusioni NIUNA, NIUNA affatto ne intendono, *e s'accorgerebbero gl' Infelici d'aver peregrinato il tempo di vita loro a chius'occhi, e vissuto mendicando all'altrui mercede, e col sempre starsene a detta di Favolatori, e di Menzogneri senza* MAI, MAI, MAI *veder' in viso la* VERITA'.

Taccians fra tanto questi Falsari della vera bontà, Ribelli a IDDIO, *e Nemici infestissimi degli amatori del vero, e degli industriosi Cultori delle Mattematiche Discipline, e tu, Studioso Giovane, che intento sei ad erudirtene,* Non ti curar di lor, ma guarda, e passa.

Guardati, volli dirti, dal dare orecchio ad un' altra sorta di Guastatori spropositati, e ignoranti, ma non men presuntuosi degli altri, i quali ambiziosi, e vaghi d' acquistar nome, si pongono sul grave posto di Pirroni, tentando di rimetter sù l' antica Setta degli Scettici, col negar i principj della Geometría noti a' Fanciulli, e perciò indubitabili, come insegnati loro dalla Natura.

Dissi spropositati, perchè questi medesimi, che deridono la Geometría, lodan le pratiche Operazioni, che hann' origine da quella, che è giusto giusto come se altri commendasse gli scherzi varj delle fonti, e disprezzasse poi l' Elemento dell' acqua, senza riguardo, che se questo non fosse di sua natura fluido, trasparente, e operante col momento di sua gravità specifica, e della sua propria altezza, nino *no di que' tanti utili, e dilettevoli effetti si goderebbe.*

Dissi ancora ignoranti, perchè mancando questi della più nobile prerogativa dell' anima ragionevole, da' Savj d' ogni età raffigurata per una spezie di facultà creatrice, che assai più d' ogni altra ci approssima, e ci rende simili al CREATORE *(parlo di quel retto, e ben ordinato passaggio da verità note ad ignote, che da' primi Uomini fu chiamato Inventiva) incapaci del gran pregio di questa l' abborriscono, e la disprezzano in quei, che dall'* AUTOR DELLA VERITA' *se ne trovano punto punto privilegiati; nè s' accorgono i miseri, che se negli andati Secoli non fossero stati Inventori e nelle Scienze, e nell' Arti, il Mondo sarebbe sempre come nascente, e tutto involto in densissime tenebre d' ignoranza, nelle quali trovandosi immersi Costoro, lodando solamente quegli Esercizj, che son da loro,* Non ti curar di lor, ma guarda, e passa.

Guardati, volli dirti, dal dare orecchio ad un'altra sorta di Guastatori spropositati, e ignoranti, ma non men presumtuosi degli altri, i quali ambiziosi, e vaghi d'acquistar nome, si pongono sul grave posto di Pirroni, tentando di rimetter sù l'antica Setta degli Scettici, col negar i principj della Geometria noti a' Fanciulli, e perciò indubitabili, come insegnati loro dalla Natura.

Dissi spropositati, perchè questi medesimi, che deridono la Geometria, lodan le pratiche Operazioni, che hann'origine da quella, che è giusto giusto come se altri commendasse gli scherzi varj delle fonti, e disprezzasse poi l'Elemento dell'acqua, senza riguardo, che se questo non fosse di sua natura fluido, trasparente, e operante col momento di sua gravità specifica, e della sua propria altezza, niuno *no di que' tanti utili, e dilettevoli effetti si goderebbe.*

Dissi ancora ignoranti, perchè mancando questi della più nobile prerogativa dell' anima ragionevole, da' Savj d'ogni età raffigurata per una spezie di facultà creatrice, che assai più d'ogni altra ci approssima, e ci rende simili al CREATORE *(parlo di quel retto, e ben ordinato passaggio da verità note ad ignota, che da' primi Uomini fu chiamato Inventiva) incapaci del gran pregio di questa l' abborriscono, e la disprezzano in quei, che dall'* AUTOR DELLA VERITA' *se ne trovano punto punto privilegiati; nè s' accorgono i miseri, che se negli andati Secoli non fossero stati Inventori e nelle Scienze, e nell' Arti, il Mondo sarebbe sempre come nascente, e tutto involto in densissime tenebre d' ignoranza, nelle quali trovandosi immersi Costoro, lodando solamente quegli Esercizj, che son da loro,* *dove cioè si richiede, o un' assidua fatica di schiena, o un giocar di memoria, e burlansi degli altri studj, che vogliono opra d' ingegno, finezza di giudizio, e perspicacia nell' Inventiva, delle quali doti i Poverelli trovansi sprovveduti: ond' e' van seminando questa dottrina, che le Mattematiche speculative sieno studj aridissimi, e che si perdano intorno a frivole sottigliezze, di niun profitto, nè a se, nè al Pubblico, nè al Privato; e che assai più vaglia un' oncia di pratica, che cento, e mille libbre di Teorica, e cose simili solite andar per le bocche del Volgo ignaro. Quì con ben quattro esempj di casi avvenuti potrebbesi far loro toccar con mano quanto sien falsi i lor detti, col dimostrare, che per mancanza di Mattematica seguiron già inconvenienti gravissimi, ed irreparabili; ma perchè al fatto non è rimedio, è anche superfluo il parlarne; bastando ri-*

spon-

spondere a simil Gente, che n'è pur in gran numero, Nè sutor ultra crepidam, & quam quisque norit artem, in hac se exerceat.

Altri poi ve ne sono, di gran circuito bensì, ma contenente assai poco spazio, i quali avendo le Mattematiche e per belle, e per buone, senza cercar altro di loro si danno a credere, ch'elleno sieno studj solo per ornamento del Cavaliere, come è forse il ballare, il saltare a cavallo, il romper leggiadramente una lancia, o il far simil' altri lodevoli esercizj, quantunque per avventura non de' più necessarj. Da questi tali, che più oltre non sanno, io non premo tanto, o nobil Giovane, che tu fugga come dagli altri, anzi ti esorto a prestar loro fede, e dopo l'esserti ben corredato di tanti, e così degni ornamenti, ad oggetto di renderti anche più ragguardevole, provati un poco, in grazia del VERO, a imparare a cono-

ſcere, ed a rilevar i caratteri di quel primitivo Idioma, con cui, dettante la SOVRANA SAPIENZA, *di propria man della Geometría furono ſcritte in cifra l'eterne Opere di quella, tutte egualmente maraviglioſe, e delle quali è permeſſo talora deciferar di quaggiù qualche breve paſſo da chi ſol ſe ne proccura la chiave, e la contraccifera, che come udiſti poc'anzi, ſta eſpreſſa colle figure, e ſpiegata dalle infallibili prove della medeſima Geometría, unica Segretaria, e Interpetre fedele della ripoſta* VERITA': *che ſe mai, per tua gran ventura, ti ſortirà balbettare, non che parlare ſpedito sì bel linguaggio, io ti aſſicuro, che ornatiſſimo allora, anzi beato in terra ti chiamerai. Trattanto ſappi, e ſappianlo ancora quei, che fin a quì ti ho deſcritti, che* a giudizio de' Savj univerſale, E DI CHI QUA' EREDITO' IL FILOSOFAR COL

RE-

REGNARE, *quanto di buono, di onesto, di utile, e dirò ancora di vago, si esercita nel viver civile, tutto per singolar dono celeste trae l'origin sua, e suoi natali dalla sola Geometría feconda Madre dell'altre Teoriche dimostrative, applicate, oltre alla Filosofia naturale, alle pratiche dell'Arimmetica, e dell'Astronomia, e della Musica, e delle Meccaniche, e delle Prospettive; alla Geografia, alla Cronologia, ed alla Nautica; oltre all'esser di sommo ajuto, in sentenza del grand'Ippocrate, alla stessa Medicina, ed in somma a tutte le Arti, e facultà ridondanti a comun beneficio, e ad onesto diletto degli Uomini.*

Che se la nostra Chiesa Cattolica si gode comodo, e quiete dalla Correzion Gregoriana del Calendario: Se un Colombo, un Vespucci arditamente s'espongono agl'insulti di Mari ignoti per tentar la conquista di nuovi Mondi, e con prosperità secon-

dante i presagj loro la conseguiscono: Se il nostro divino Galileo investiga di proprio ingegno, appena uditone il grido, il più ammirabile fra gli Strumenti da umana industria inventati: Se con esso armatane la propria vista, da questi bassi a' sublimi oggetti rivolto, trapassa ad isvelarci innumerabili Stelle fregiate di viva luce, ed oltre a tante

Petr. Trionf. 3. d' Amore.

Nuove cose, e giammai non
più vedute.

osserva, il primo, con maravigliosa accortezza il suo benefico Giove, non da una sola, ma da quattro Lune assistito, e consagrata questa (che ben può dirsi

Virg. Egloga 4.

Clara Deum Soboles, Magnum Jovis incrementum)

all' Augusta Prosapia del SUO SIGNORE, *e sì eseguiti gli* ALTI ETERNI DECRETI, *gli sovvien subito d' interessarla col suo fortunatissimo Occhiale al glorioso guadagno della tanto ricercata invenzione del*

na-

navigar per lunghezza, ed alla correzion Geografica dell' Isole, delle Coste, e de' Continenti; e perciò con Atlantiche fatiche, e per tanti lustri osserva, e rintraccia al fine l'esatte misure de' moti, e de' giri di questa, coll' inclita FAMIGLIA MEDICEA, *quasi dissi*, GIOVIALE CONSORTERIA. *Se il medesimo Galileo Restauratore, e piuttosto Inventor del vero, e saldo filosofare: anatomizza, per così dire, la Natura; e a confusion de' passati Filosofanti s' interna a contemplar le più riposte passioni del moto, per cui essa Natura,*

Dal gran Maestro di color che sanno. — *Dante Infer. Cant. 4.*

vien definita, e lo ferma egli il primo, e lo sottopone alle rigide leggi dell'invariabile Geometria, applicandolo di più con Mattematico artifizio alle pratiche militari; e sì per ogni guisa,

Nec Mare, nec Tellus, nec Cœli lucida Templa — *Lucr. lib. 1.*

esen-

esenti vanno dalla curiosa, e nobile perscecuzione di questo perspicacissimo Lince, il tutto fu pur opra d'una profonda cognizione delle dottrine de' tempi, e de' numeri; della forma, e costituzione delle parti dell'Universo; dell'ordine, moto, e via de' raggi visivi sì riflessi, come rifratti; e del mirabile operare della Natura con Mattematiche dimostrazioni penetrato, Scienze tutte Suddite obbedientissime alla Geometría lor Regina. Ma se ciò non ostante, quest' Anime smarrite, e inviluppate quà di soverchio tra i lacci de' terreni interessi, scordatesi in tutto di quel Divino, che hanno in loro,

Petr. Son. 220. Al ver non volgon gli occupati sensi.

ma sol rimirano al compiacimento, ed agli agj del proprio corpo, assiduamente anelando di posseder quaggiù quel che eziandío posseduto, non sarà loro, sappiano almeno, che se la regola aurea governa tutta la Mercatura,

ra,

ra, *di cui* la Turba al vil guadagno intesa *fa sì gran conto*, *l'Arimmetico Geometra l'inventò*. *Se la bussola*, *e la carta con acquisti di tesori immensi reggono la Nautica*, *il Geografo Mattematico a sì grand' usi quella applicò*, *e questa descrisse*, *e si preparò*. *E che una sola Proposizione d'Euclide*, *una sola d'Archimede dan legge*, *e regola*, *questa alla Meccanica tutta*, *e quella alla Altimetria*, *alla Geodesia*, *e ad altre simiglianti pratiche*, *sole avute in prezzo da Costoro*, *i quali*, *se abili fossero d'andar discorrendo*, *e con progresso retrogrado esaminando*, *quali sieno stati i principj delle più rilevanti operazioni*, *e de' più insigni ritrovamenti dell' Uomo*, *riconoscerebbergli in fine dal Mattematico speculativo*, *e per conseguente dal Geometra*, *che a quello inseparabilmente precede*: *e così esclamerebbero anch' essi col Divino Filosofo*, *doversi dar ordini ri-*

gorosi, che niuno di questa fioritissima Città nostra sia tanto ardito, qual Pirrone, o altri in ciò suoi seguaci, di disprezzar la Geometría, essendochè, quelle cose ancora, che pajon esser affatto fuor di sua sfera; e che non abbiano, che far con essa, son già di poco rilievo, ma rilevantissime, ed alla Repubblica necessarissime. E che sia 'l vero riconoscetelo appresso da alcuni de' seguenti.

SEN-

SENTIMENTI
DI
AUTORI ILLUSTRI
INTORNO
ALL' ECCELLENZA E ALL' UTILITA'
DELLA
GEOMETRIA.

IPPOCRATE

A Tessalo suo Figliuolo, della versione del Foesio.

Geometriæ, & Arithmeticæs cognitioni studium adhibeto, mi Fili. Neque enim solum vitam tuam gloriosam, & ad multa in rebus humanis utilem, verùm etiam mentem acutiorem, & longè splendidiorem ad fructum eorum omnium, quæ in Arte medica usui sunt, consequendum reddet. Quamquam quidem

Geometriæ cognitio, cum multas, & varias formas habeat, & omnia cum demonstratione ad exitum perducat, tum ad ossium positus, & articulos suis sedibus emotos, tum etiam ad reliquam membrorum compositionem, utilis futura est. Nam ad horum affectuum variam cognitionem facilius perveniet, tum etiam articulorum repositione, tum ossium contritorum resectione, & perforatione, & coaptatione, & subtractione, reliquaque curatione ductus, qui locum, & os quale sit ex eo emotum cognoverit. Numerorum verò series, tum ad ambitus, tum ad eas mutationes, quæ præter rationem in febribus fiunt, & ad judicandos ægros, & ad morborum securitatem satis futura est. Præclarum enim est id tibi in Re medica subministrari, quod intensionis ac remissionis partium, quæ ex parte inæquales sunt facilem tibi absque errore notitiam præbeat. Qua propter ad hujus experientiæ facultatem valdè contendito. Vale.

PLA-

PLATONE

Nel Lib. vii. *della Repubblica, dalla versione di Marsilio Ficini.*

GEometria, ejus, quod est semper, non ejus, quod, & oritur quandoque, & interit, cognitio est. Attollet igitur, o Generose Vir, ad Veritatem animum, atque ita ad philosophandum præparabit cogitationem, ut ad supera convertamus, quæ nunc, contra quàm decet, ad inferiora dejicimus. Quam maximè igitur præcipiendum est ut, qui præclarissimam hanc habitant Civitatem, nullo modo Geometriam spernant; nam, & quæ præter ipsius propositum quodammodo esse videntur; haud exigua sunt, &c.

QUINTILIANO

Nel Libro primo dell' Instituzione Oratoria al Cap. x.

IN Geometria, partem fatentur esse utilem teneris ætatibus, agitari namque animos, atque acui ingenia, & celeritatem percipiendi venire inde concedunt: sed prodesse eam non ut ceteras artes, cùm perceptæ sint, sed cum discatur existimant.

mant. Id vulgaris opinio eſt, nec ſine cauſa ſummi Viri etiam impenſam huic Scientiæ operam dederunt. Nam cum ſit Geometria diviſa in numeros, atque formas, &c.

PROCLO DIADOCO

Sopra il primo d' Euclide, al Cap. xv.

HÆc itaque Matheſis eſt, ſive Diſciplina, quæ externarum in anima rationum reminiſcentia eſt, & Mathematica (hoc eſt diſciplinativa Scientia, ut ſic exponam) propter hanc ea cognitio potiſſimum nuncupatur, quæ nobis ad earum rationum reminiſcentiam maximè confert. Et opus igitur, atque officium hujus Scientiæ quale porrò ſit, a nomine fit manifeſtum. Id nempe, quod inſitam movet cognitionem, & promit formas, quæ nobis ſecundum eſſentiam inſunt, & infert oblivionem, atque ignorantiam, quæ nobis ab ortu noſtro innatæ ſunt: & ſolvit vincula, quæ ab irrationabilitate proveniunt, ad DEI planè ſimilitudinem, hujus Scientiæ Præſidis, qui intelligentia munera manifeſtat, & cuncta divinis rationibus complet: animas quoque ad mentem erigit, ac veluti è profundo exuſcitat ſopo-

re,

re, & inquisitione ad se ipsas convertit, & obstetricatione quadam perficit, puræque mentis inventione ad vitam beatam deducit.

TEONE SMIRNEO

Nell' Esposizione di ciò, che appartiene all' intelligenza delle cose Mattematiche di Platone, *al* Cap. I. *della versione del dottissimo Bulialdo.*

ERathosteries in Libro, cui Platonico nomen imposuit refert, postquam Delios super pestis liberatione interrogantes, oraculo dato, jussisset Deus *ALTARE DUPLUM* ejus, quod tunc erat, erigere, multam Fabris, ingentemque objectam animi anxietatem quærentibus: *Quomodo oporteat solidi dati duplum efficere.* Ipsosque adiisse Platonem de hoc interrogaturos, huncque eis respondisse, quod DEUS ejuscemodi Oraculum Deliis ediderit, non quasi dupli Altaris egenus; sed objecerit Græcis, & exprobraverit circa Mathematicas Scientias, & Geometriam, neglectum, atque socordiam.

Più sotto. Nos Pueros erudimus in Musica, Gymnastica, Literis, Geometria, & Arithmetica, nihil aliud molientes, quàm ut concipiant (veluti tincturam) rationes de omni virtute, quam didicerint, ubi prævias detersiones, purgationes, aliasque præparationes, has nempe Disciplinas, quasi quædam adstringentia medicamenta, adhibuerimus; ut indelebilis sententia illorum vigeat, cùm indolem, & educationem commodam nacti fuerint, ne strigmenta illa abstersiva colorem, tincturamque abradant, voluptas scilicet omni perversitate, & consuetudine periculosior, dolor etiam, metus, & cupiditas alio quovis strigmento magis corrosiva.

Illustrazione ingegnosa del luogo sopra referito, presa dalle Note eruditissime del Bulinldo.

QUemadmodum igitur lanas præparant Tinctores alumine eas repurgando, & condensando, ita Philosophus animos Discipulorum suorum præparat repurgando ipsos ab omnibus præconceptis pravis, distortisque opinionibus, instipandoque Disciplinis Mathematicis, ut alia Philosophica dogmata faciliùs, & ad satietatem imbibant, & firmissimè retineant, nec se prava mente abripi unquam patiantur.

SE-

SEVERINO BOEZIO

Nel primo Libro dell' Arimmetica, *al* Capit. I.

QUibus quatuor, Arithmetica nempe, Geometria, Musica, & Astronomia, si careat Inquisitor, Verum invenire non possit, ac sine hac quidem speculatione Veritatis nulli rectè sapiendum est. Est enim Sapientia earum rerum, quæ veræ sunt cognitio, & integra comprehensio. Quòd hæc qui spernit, idest has semitas Sapientiæ, ei denuncio non rectè philosophandum. Siquidem Philosophia est Amor Sapientiæ, &c.

GIOVAN BATISTA BENEDETTI

Nobil Veneziano Filosofo, e Mattematico di gran nome, nella sua Prefazione al Libro degli Oriuoli.

SI quæ autem sunt Disciplinæ, quæ speculationis excellentia, tractationis jucunditate, atque usûs utilitate præstent, hæ profectò sunt Mathematicæ, per quas, & Divinas operationes intelligimus, & præstantissimum rerum Opificem æmulamur dum ſicut ille naturalium, nos artificialium rerum Authores efficimur. Harum ſpeculationes adeo hominibus conveniunt, ut vel ex his homines ipſi an vere ſint dignoſcantur. Unde Ariſtippus Cyrenaicus ex naufragio in Rhodiorum litus excuſſus, ubi Mathematicas vidit in pulvere figuras, gaudio geſtiens, proſiliiſſe fertur, quod veſtigia hominum cognoviſſet, &c.

IL PADRE CRISTOFANO CLAVIO

Nella Prefazione agli Elementi d' Euclide, *al* Cap. iv.

SI verò nobilitas, atque præſtantia Scientiæ ex certitudine demonſtrationum, quibus utitur, ſit judicanda, haud dubiè Mathematicæ diſciplinæ inter ceteras omnes præcipuum habent locum. Demonſtrant enim omnia, de quibus ſuſcipiunt diſputationem, firmiſſimis rationibus, confirmantque, ita ut verè ſcientiam in Auditoris animo gignant, omnemque prorſus dubitationem tollant; id quod aliis Scientiis vix tribuere poſſumus, cùm in eis ſæpenumero intellectus multitudine opinionum, ac ſententiarum varietatate, in veritate conclusionum judicanda suspensus hæreat, atque incertus. Hujus rei fidem apertè faciunt tot Peripateticorum Sectæ (ut alios interim Philosophos silentio involvam) quæ ab Aristotele, veluti rami è trunco aliquo, exortæ, adeo & inter se, & nonnunquam a fonte ipso Aristotele diffident, ut prorsus ignores, quid nam sibi velit Aristoteles, num de nominibus, an de rebus potiùs disputationem instituat. Hinc fit, ut pars Interpretes Græcos, pars Latinos, alii Arabes, alii Nominales, alii denique Reales, quos vocant (qui omnes tamen Peripateticos se esse gloriantur) tanquam Ductores sequantur. Quod, quàm longè a Mathematicis demonstrationibus absit, neminem latere existimo. Theoremata enim Euclidis, ceterorumque Mathematicorum, eandem hodie, quam ante tot annos, in Scholis retinent veritatis puritatem, rerum certitudinem, demonstrationumque robur, ac firmitatem. Huc accedit id, quod Plato ait in Philebo, seu Dialogo, qui de summo bono inscribitur, eam Scientiam esse digniorem, præstantioremque, quæ magis sinceritatis, veritatisque est amans. Cùm igitur Diſciplinæ Mathematicæ Veritatem adeo expetant, adament, excolantque, ut non ſolûm nihil, quod ſit falſum, verùm etiam nihil, quod tantùm probabile exiſtat, nihil denique admittant, quod certiſſimis demonſtrationibus non confirment, corroborentque, dubium eſſe non poteſt, quin eis primus locus inter alias Scientias omnes ſit concedendus.

Il medeſimo Padre Clavio, più ſotto.

AD has omnes utilitates accedit maxima jucunditas, atque voluptas, qua cujuſque animus his Artibus colendis, exercendiſque perfunditur. Sunt enim hæ præcipuæ ex ſeptem Artibus liberalibus, in quibus non ſolùm ingenui Adoleſcentes, verùm etiam nobiles Viri, Principes, Regès, ac Imperatores ad honeſtiſſimam, maximèque liberalem oblectationem animi, quam ſumma etiam cum utilitate conjunctam pariunt, diù, multùmque verſari ſolebant: quorum exemplum multos adhuc noſtra hac ætate imitari conſpicimus.

IL PADRE DON BENEDETTO CASTELLI

Discepolo del Galileo, nelle Risposte all'Opposizioni di Lodovico delle Colombe, contro al Trattato delle Galleggianti del Galileo; del medesimo parlando.

PErò dopo l'aversi impennate le ali colle penne delle Mattematiche, senza le quali è impossibile sollevarsi un sol braccio da terra, ha tentato di scoprire almeno qualche particella degli infiniti abissi della Scienza naturale, la quale egli stima tanto difficile, ed immensa, che concedendo lui, molti uomini particolari aver saputo perfettamente chi una, e chi un'altra, e chi più d'una dell'altre facultadi, crede poi, che tutti gli uomini insieme stati al Mondo sin'ora, e che saranno per l'avvenire, non abbiano saputo, nè forse siano per sapere una piccola parte della Filosofia naturale.

IL GALILEO

Nel Saggiatore.

PArmi di ſcorgere in alcuni ferma credenza, che nel filoſofare ſia neceſſario appoggiarſi all'opinioni di qualche celebre Autore, ſicchè la mente noſtra, quando non ſi maritaſſe col diſcorſo d'un'altro, ne doveſſe in tutto rimanere ſterile, ed infeconda; e forſe ſtimano, che la Filoſofia ſia un libro, e una fantaſia d'un uomo, come l'Iliade, e l'Orlando Furioſo, libri ne'quali la meno importante coſa è, che quel che vi è ſcritto, ſia vero. Ma la coſa non iſtà così. La Filoſofia è ſcritta in queſto grandiſſimo libro, che continuamente ci ſtà aperto innanzi agli occhi (io dico l'Univerſo) ma e'non ſi può intendere, ſe prima non s'impara a intender la lingua, nella quale egli è ſcritto. Egli è ſcritto in lingua Mattematica, ed i caratteri ſono Triangoli, Cerchj, ed altre figure geometriche, ſenza i quali mezzi è impoſſibile intendere umanamente parola; ſenza queſti è un aggirarſi vanamente per un oſcuro Laberinto.

IL

IL GALILEO

Nella prima Giornata de' due Sistemi.

Salv. SIgnor Simplicio, noi siamo quì tra noi discorrendo famigliarmente per investigare qualche verità; io non avrò mai per male, che voi mi palesiate i miei errori, e quand' io non avrò conseguita la mente d' Aristotile, riprendetemi pur liberamente, ch' io ve ne avrò buon grado. Concedetemi intanto, ch' io esponga le mie difficultà, e ch' io risponda ancora alcuna cosa alle vostre ultime parole, dicendovi, che la Logica, come benissimo sapete, è l' Organo, col quale si filosofa; ma siccome può esser, ch' un Artefice sia eccellente in fabbricar Organi, ma imperito in saperli suonare, così può esser un gran Logico, ma poco esperto nel sapersi servire della Logica; siccome ci son molti, che sanno per lo senno a mente tutta la poetica, e son poi infelici nel comporre quattro versi solamente: altri possegono tutti i precetti del Vinci, e non saprebbero poi dipignere uno sgabello. Il sonar l' Organo non s' impara da quelli, che ſanno far Organi, ma da quelli, che gli ſanno ſonare: la Poeſia s' impara dalla continua Lettura de' Poeti: il dipignere s' apprende col continuo diſegnare, e dipignere: e il dimoſtrare, dal continuo ſtudio de' libri pieni di Dimoſtrazioni, che ſon poi i Libri Mattematici ſoli, e non i Logici. Ora tornando al propoſito, ec.

IL GALILEO

Nella ſeconda Giornata.

Dopo aver il Salviati addotto una Dimoſtrazione Fiſica Mattematica intorno ad un ſuppoſto effetto Fiſico, ſoggiugne così il Sagredo.

VEramente il diſcorſo è molto ſottile, ma altrettanto concludente, ed è forza confeſſare, che 'l voler trattare le quiſtioni Naturali ſenza Geometria, è un tentàr di fàr quello, che è impoſſibile ad eſſer fatto.

IL GALILEO

Nella terza Giornata.

Interrogato Simpl. dal Sagr. di quello gli paja d'un discorso Fisico Mattematico fatto, ex hypothesi *dal Salv. così risponde.*

Simpl. Queste (s' io devo dire il parer mio con libertà) mi pajono di quelle sottigliezze geometriche, le quali Aristotile riprende in Platone, mentre lo accusa, che per troppo studio della Geometria si scostava dal saldo filosofare: ed io ho conosciuti, e sentiti grandissimi Filosofi Peripatetici sconsigliare i lor Discepoli dallo studio delle Mattematiche, come quelle, che rendono l' intelletto cavilloso, ed inabile al ben filosofare; instituto diametralmente contrario a quello di Platone, che non ammetteva alla Filosofia, se non chi prima fosse impossessato della Geometria.

Sagr. Applaudo al consiglio di questi vostri Peripatetici di distorre i loro Scolari dallo studio della Geometria, perchè non c'è arte alcuna più accomodata di questa per iscoprire le fallacie loro; ma vedete quanto coteſti ſieno differenti da' Filoſofi Mattematici, i quali aſſai più volentieri trattano con quei, che ſono informati della comune Filoſofia Peripatetica, che con quei, che mancano di tal notizia, i quali, per tal mancanza, non poſſono far paragone tra dottrina, e dottrina.

Gli Accademici del Cimento, nel Proemio al Lettore.

LA Geometria dando alla bella prima nel vero ne libera in un ſubito da ogni altro più incerto rintracciamento. Il fatto è, che ella ci conduce un pezzo innanzi nel cammino delle filoſofiche ſpeculazioni, ma poi ella ci abbandona in ſul bello: Non perchè la Geometria non cammini ſpazj infiniti, e tutta non traſcorra la univerſità dell' Opere della Natura, ſecondo che tutte obbediſcono alle Mattematiche leggi, onde l' eterno intendimento con liberiſſimo conſiglio le governa, e le tempera, ma perchè di queſta sì lunga, e ſpazioſa via per anche non le tenghiamo dietro, che pochi paſſi.

E poco più sotto.

QUivi dunque (cioè nelle esperienze) fa di mestieri l'intendersi da Maestro delle maniere del vero, e del falso, e usare dell'ultima perspicacia del proprio giudizio per discerner bene s'ella è, o non è. Lo che per poter far meglio non v'è dubbio, ch'e' bisognerebbe aver veduto alcuna volta la verità svelata, ed è questo un vantaggio, che hanno solamente coloro, che degli studj della Geometria hanno preso qualche sapore.

XENOFONTE

Nel Lib. iv. *delle cose memorabili.*

PRimùm Geometriam eo usque discendam ajebat (Socrates) donec quis posset, si usus ita ferret, terram, vel recta metiendi ratione accipere, vel tradere, vel distribuere, vel opus designare. Atque hoc tam posse disci facilè, ut qui animum ad dimensionem advertat, is & scire possit quanta sit ipsa terra, &c.

CICERONE

Nel Lucullo, ovvero Lib. ii. *delle Quistioni Accademiche.*

GEometræ provideant, qui se profitentur non persuadere, sed cogere, & qui omnia vobis, quæ describunt, probant, non quæro ex his illa initia Mathematicorum, quibus non concessis, digitum progredi non possunt.

E nel libro primo delle Tuscul. parlando de' Greci.

IN summo apud illos honore Geometria fuit: itaque nihil mathematicis illustrius.

SENECA

Epistola 88.

QUum ventum est ad naturales quæstiones Geometriæ testimonio statur.

FILONE EBREO

Nel libro de Cherubim.

GEometria verò proportione æqualitatem afferens, & quicquid in nobis enorme, immodicum, inconcinnum est, per rhythmos, mensuras, modulosque musicæ civilis curans.

CELIO RODIGINO

Nel Lib. vii. *delle Antiche Lezioni* Cap. xxx.

PYthagoras autem, & cum eo multi, qui illo duce purius excitasse mentem videntur, amplissime astruxerunt, absque mathematico quadrìvio haud facilè philosophiæ apicem contingi, nec posse verum percipi. Propterea qui illud neglectui habuerit, cogitare subinde debet se philosophari haud rectè. Quoniam mathematicæ disciplinæ subsellia quædam sint, ac elementa, vel gradus, quibus conscendantur altiora, &c. Caterùm initio Geometria præcipuè, & Arithmetica in mathematum album a Pythagora sunt advocatæ, quòd ad omnem scientiam, omnemque disciplinam capessendam

has

has cum primis accomodas perſpexiſſet: Hinc & illa feſtiva vox Socratici Ariſtippi profluxit, opinor, qui ex naufragio in Rhodiorum littus maris impetu, & ventis affilientibus quum foret excuſſus, ac inibi mathematicas formulas eſſet intuitus, gaudio geſtiens proſilivit, & bene ſperare comites juſſit quoniam veſtigia hominum noſcitaret. Sed enim mathematica ſpeculatio ad cognitionis acumen a Platone ſuſcepta eſt, quia ſurrigat animum, & ad rerum divinarum intuitum aciem mentis exacuat, &c. Nam mathematicas ſpeculationes veluti præludium quoddam ad divinorum perpenſionem ſtatuere convenit.

EVANGELISTA TORRICELLI

Nella nona Lezione Accademica in lode delle Mattematiche.

CHe per leggere il gran Volume dell'Univerſo (cioè quel libro, ne' fogli del quale dovrebbe ſtudiarſi la vera filoſofia ſcritta da Dio) ſieno neceſſarie le Mattematiche, quegli ſe n'accorgerà, il quale con penſieri magnanimi, aſpirerà alla ſcienza delle parti integranti, e de i memi membri massimi di questo gran corpo, che si chiama Mondo. Quando alcuno desiderasse di sapere le distanze de' Pianeti, e delle stelle, sì fra di loro, come ancora in paragone della Terra, quando altri ricercasse le proporzioni delle loro grandezze, ovvero i tempi precisi de' loro periodici movimenti; se alcuno desiderasse conoscer da se stesso l' ampiezza di questa palla terrena, che giornalmente calpestiamo; se chiedesse, onde procede la varietà delle stagioni; qual sia la causa dell' inuguaglianza de' giorni, la quale in tutti i modi si diversifica secondo le varie obliquità della sfera

Quid tantum oceano properent se tingere soles
Hiberni; vel quæ tardis mora noctibus obstet.

Quando investigasse le precessioni degli Equinozj, i termini degli Eclissi, la trepidazione del Firmamento, e cose simili; certo s' accorgerebbe, che l' unico Alfabeto, e i soli caratteri, con i quali si legge il gran manoscritto della Filosofia divina nel libro dell' Universo, non sono altro, che quelle misere figure, che vedete ne' Geometrici elementi.

Il medeſimo Torricelli più ſotto.

VEnga la Geometria, la quale doverebbe ſtimarſi, ſiccome veramente è, la madre, e la regina di tutte le Scienze Mattematiche. Dovremmo riconoſcere da lei tutti i giovamenti, e tutti i diletti, che derivano dall'Arimmetica, e dalla Muſica, dall'Aſtronomia, e dalla Meccanica, e dalla Geografia, dall' Architettura, dall'Ottica, e da tutte l'altre figliuole ſubalternate alla Mattematica famiglia. Ma per toccar qualche ſuo proprio particolare, quante volte ci occorre il miſurar la ſuperficie de' campi, e la tenuta de' poderi? Come ſpeſſo ſi ricerca, quante braccia cube di fabbrica ſieno in un muro? Quanto ſia il vano, e la capacità di una caſa, o di qualunque vaſo di che figura ſi ſia? Quante braccia di terra ſieno in un monte da traſportarſi; quante ne foſſero in un pozzo, o in un foſſo prima, che foſſe lavorato; quant' acqua paſſi per un fiume in un' ora, ovvero in altro aſſegnato ſpazio di tempo. Queſte, e molte altre ſimili, ſon quiſtioni, che dal ſolo Geometra, e non da alcun al-

tro

tro Professore possono essere sciolte, e determinate. Quante volte accade dover levar piante di Città, di Fortezze, e anco di Provincie? La Geometria con semplici strumenti vi descriverà la pianta desiderata, ancora quando non possa avvicinarsi al luogo da descriversi. Misurerà coll'occhiate, ed escluderà colla lunghezza dello sguardo l'attività dell'Artiglierie. Ella dirà l'altezza di quella Rocca, ò di quel Castello senza appressarvisi; ella saprà quanto sia il perpendicolo di quel Monte, ò il diametro di questo globo, ancorchè l'uno, e l'altro stia immerso nelle altissime viscere del terreno. Ella finalmente porterà le misure, dovunque arriverà colla vista; e non sarà possibile nè anco all'altissimo Saturno d'esentarsi dalle dimensioni della sagacissima Geometría. Lascio star da parte, che se ad alcun de' viventi cadesse giammai nell'animo il pensiero di voler vagheggiar la verità (la quale, per mio credere, è la più bella fra tutte le figliuole dell'onnipotenza) non conviene, che la ricerchi, o speri di vederla giammai tanto presente, e tanto manifesta in altri libri, quanto in quelli della Geometría. Parlo solamente de' libri della ſapienza umana, fra le carte de' quali concedo, che molte volte s' incontrerà qualche vero, ma però come peregrino, e tanto avviluppato nella miſtione della falſità, che l' accompagnano, che l' intelletto ſpeculativo durerà gran fatica a diſcernere le larve di nebbia, da' ſimulacri di verità. Pel contrario ne' libri della Geometría vedete in ogni foglio, anzi in ogni linea la verità ignuda, la quale vi diſcuopre nelle figure geometriche le ricchezze della Natura, e i teatri della maraviglia.

DEGLI ELEMENTI D' EUCLIDE TRADOTTI IN VOLGARE.

LIBRO PRIMO.

DEFINIZIONI.

I.

IL punto è quello, che non ha parte, ovvero, che non ha grandezza alcuna.

II.

La linea è una lunghezza ſenza larghezza.

III.

I fini della linea ſono i punti.

IV.

La linea retta è quella, che ſi diſtende ugualmente fra' ſuoi punti.

V.

La ſuperficie è quella, che ſolamente ha lunghezza, e larghezza.

VI.

I fini della ſuperficie ſono le linee.

VII.

La ſuperficie piana è quella, che giace ugualmente fra le ſue linee.

VIII.

L'angolo piano è quella inclinazione, che fanno due linee, quando in un punto ſi toc-

toccano, e non ſon poſte dirittamente fra loro.

IX.

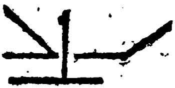
E quando le linee, che contengono l' angolo ſono rette, ſi chiama tal angolo rettilineo.

X.

Ma quando la linea retta ſtando ſopra un' altra retta, fa gli angoli da i lati fra loro uguali, ſono ambedue retti; e la linea, che ſta ſopra, ſi chiama perpendicolare a quella, alla quale ella ſopraſtà.

XI.

L' angolo ottuſo è quello, che è maggior del retto.



XII.

L'angolo acuto è quello, che è minore del retto.

XIII.

Il termine è fine di qualche cosa.

XIV.

La figura è quella, che è contenuta da uno, o da più termini.

XV.

Il cerchio è una figura piana contenuta da una linea, che si chiama circonferenza, alla quale quante linee rette pervengono tirate da un punto, che è dentro alla figura, tutte fra loro sono uguali.

XVI.

E questo tal punto si chiama centro del cerchio.

Il

XVII.

Il diametro del cerchio è una linea retta, che passa per lo centro, e dall' una, e l' altra parte è terminata dalla circonferenza, la quale eziandio divide il cerchio per mezzo.

XVIII.

Il mezzo cerchio, è una figura contenuta dal diametro, e dalla metà della circonferenza.

XIX.

La porzione del cerchio è una figura contenuta dalla linea retta, e dalla circonferenza del cerchio.

XX.

Le figure, che sono contenute da linee rette, si chiamano rettilinee.

XXI.

E' se sono contenute da tre linee, s' addimandano trilatere.

XXII.

Se da quattro, quadrilatere.

XXIII.

Se da più di quattro, moltilatere.

XXIV.

Delle figure trilatere è il triangolo equilatero quello, il quale ha tre lati uguali.

XXV.

L' isoscele, ovvero equicrure, che ha solamente due lati uguali.

XXVI.

Lo scaleno, che ha tutti tre i lati disuguali.

Ol-

XXVII.

Oltre a ciò delle figure trilatere è il triangolo rettangolo quello, il quale contiene in se un angolo retto.

XXVIII.

L' ottusiangolo, che ha un angolo ottuso.

XXIX.

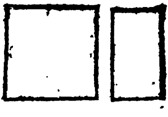
L' Acuziangolo, che ha tutti tre gli angoli acuti.

XXX.

Delle figure quadrilatere è il quadrato, il quale è equilatero, e rettangolo.

XXXI.

La figura dall' una parte più lunga è quella, che è rettangola, ma non equilatera.



XXXII.

Il Rombo è una figura, che è equilatera, ma non rettangola.

XXXIII.

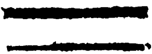
Il Romboide è una figura, che ha i lati, e gli angoli opposti fra loro uguali, ma non è nè equilatera, nè rettangola.

XXXIV.

Oltre a questo, tutte l' altre figure quadrilatere si chiamano trapezzi.

XXXV.

Le linee parallele, o equidistanti sono quelle, le quali essendo in un medesimo piano, e prolungate in infinito dall' una, e l' altra par-



parte, non si congiungono giammai insieme.

POSTULATI, OVVERO DIMANDE.

I.

Addimandasi da qualsivoglia punto, a qualsivoglia punto tirare una linea retta.

II.

Prolungare una linea retta terminata in continuo, e diritamente.

III.

Da qualsivoglia centro, e con qualsivoglia intervallo descrivere un cerchio.

IV.

Tutti gli angoli retti essere uguali fra loro.

V.

E se sopra due rette linee cadendo una retta farà gli angoli interiori, e da una medesima parte minori di

due retti, quelle linee prolungate in infinito congiungersi insieme da quella parte, dove sono gli angoli minori di due retti.

ASSIOMI, OVVERO COMUNI NOTIZIE.

I.

Quelle cose, che sono uguali ad una medesima, sono ancora fra loro uguali.

II.

Se alle cose uguali si aggiungono cose uguali, tutte sono uguali fra loro.

III.

Se dalle cose uguali si traggono cose uguali, eziandío dio le rimanenti ſono uguali fra loro.

III I.

Se alle coſe diſuguali ſi aggiungono coſe uguali, tutte ſono diſuguali.

V.

Se dalle coſe diſuguali ſi traggono coſe uguali, le rimanenti ſono diſuguali.

V I.

Le coſe, che ſono doppie di una medeſima, ſono uguali fra loro.

V I I.

Le coſe, che ſono la metà di una medeſima, ſono fra loro uguali.

V I I I.

Quelle coſe, che convengono, e ſi adattano bene inſieme, ſono uguali.

IX.

Il tutto è maggiore della ſua parte.

X.

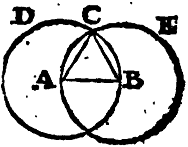
Due linee rette non comprendono ſpazio alcuno.

PROBLEMA I.

PROPOSIZIONE I.

Sopra una data retta linea terminata coſtituire il triangolo equilatero.

Sia la data retta linea terminata A B, biſogna ſopra eſſa coſtituire il triangolo equilatero. Dal centro A coll'intervallo A B deſcrivaſi il cer-
Poſt. 3. chio B C D; ſimilmente dal centro B coll'intervallo B A deſcrivaſi un altro cerchio A C E, e dal punto C, nel quale i cerchi tra loro ſi ſegano, alli punti A B ſiano tirate le linee
Poſt. primo. rette C A, C B. perchè dunque A è centro del cerchio B C D, ſarà la
Diff. 15. A C uguale alla A B; e perchè an-

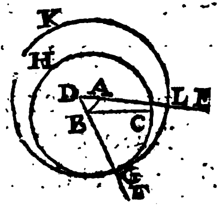


cora B è centro del cerchio ACE, sarà la BC uguale alla BA, e fu la CA dimostrata uguale alla AB, adunque l'una, e l'altra di esse CA, CB è uguale alla AB. ma quelle cose, che sono uguali ad una medesima, sono ancora fra loro uguali, onde la CA è uguale alla CB, e le tre linee CA, AB, BC sono uguali fra loro; il triangolo dunque ABC è equilatero, ed è costituito sopra la data retta linea terminata AB, lo che bisognava fare. *1. com. not.*

PROBLEMA II.

PROPOSIZIONE II.

Da un punto dato tirare una linea retta uguale ad un'altra linea data.



Sia il dato punto A, e la data retta linea BC; bisogna dal punto A tirare una linea retta uguale alla retta BC. Tirisi dal punto A al B la retta linea AB, e sopra essa costituiscasi il triangolo equila- *Post. primo. Prop. prima Post. 2. 3.*

la-

latero DAB, e si prolunghino per diritto alle DA, DB le linee rette AE, BF, e dal centro B, con l'intervallo BC descrivasi il cerchio CGH, e similmente dal centro D, coll' intervallo DG, descrivasi il cerchio GKL, perchè dunque il punto B è centro del cerchio CGH, *Dif.15.* sarà la BC uguale alla BG, oltre a ciò, perchè D è centro del cerchio GKL, sarà la DL uguale alla DG: delle quali la DA è uguale alla DB; adunque la rimanente AL è uguale alla rimanente BG, e si è dimostrata la BC uguale alla BG; onde l'una, e l'altra AL, BC è uguale alla BG, e quelle cose, che sono uguali ad una medesima, sono fra loro uguali, e però la AL è uguale alla BC; adunque dal punto dato A, si è tirata la linea retta AL uguale alla data retta linea BC, lo che bisognava fare.

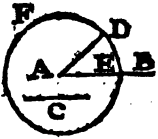
Com. not. 3. *Com. not. 1.*

PROBLEMA III.

PROPOSIZIONE III.

Date due linee rette disuguali, dalla maggiore tagliarne una uguale alla minore.

Sia-



Siano date due linee rette disuguali A B, C, delle quali A B sia maggiore; bisogna dalla maggiore A B tagliare una linea retta uguale alla minore C. Tirisi dal punto A la linea retta A D uguale alla C, e dal centro A coll'intervallo A D descrivasi il cerchio D E F; e perchè A è centro del cerchio D E F, sarà la A E uguale alla A D, ma ancor la C è uguale alla A D, adunque l'una, e l'altra delle A E, C sarà uguale alla AD, e però ancor la A E è uguale alla C; date dunque due linee rette disuguali A B, C dalla A B si è tagliata la A E uguale alla minore C, lo che bisognava fare.

Per l'ant. post. 3.

Diff. 15.

Com. not. 1.

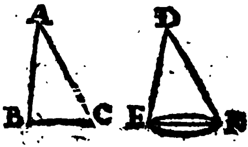
TEOREMA I.

PROPOSIZIONE IV.

Se due triangoli hanno due lati uguali a due lati, l'uno all'altro, e hanno un angolo uguale ad un angolo, che è contenuto da linee rette uguali, averanno an-

ancor la base uguale alla base, ed il triangolo sarà uguale al triangolo, e gli altri angoli a gli altri angoli, l'uno all'altro, a' quali sono sottoposti i lati uguali.

Siano due triangoli ABC, DEF, quali abbiano due lati AB, AC uguali a due lati DE, DF, l'uno all'altro, cioè il lato AB uguale al lato DE, ed il lato AC a DF, e l'angolo BAC uguale all'angolo EDF. Dico ancor la base BC esser uguale alla base EF, ed il triangolo ABC uguale al triangolo DEF, e gli altri angoli uguali agli altri angoli, l'uno all'altro, a' quali sono sottoposti i



lati uguali, cioè l'angolo ABC all'angolo DEF, e l'angolo ACB all'angolo DFE, perciocchè adattandosi il triangolo ABC al triangolo DEF, e posto il punto A sopra D, e la retta linea AB sopra la DE, ancor il punto B si adatterà al punto E, per esser la AB

ugua-

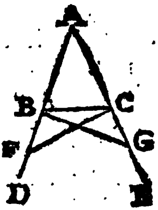
uguale alla DE, e adattandosi la AB alla DE, eziandío la linea retta AC si adatterà alla DF, conciossiacosachè l'angolo BAC sia uguale all'angolo EDF, onde ancor il punto C si adatterà ad F, perchè la linea retta AC è uguale alla linea retta DF, ma eziandío il punto B si adattava ad E, adunque la base altresì BC si adatterà alla base EF, perciocchè, se adattandosi il punto B al punto E, e C ad F, la base BC non si adatterà alla base EF, due linee rette comprenderanno spazio, che non può essere, adunque la base BC si adatterà alla base EF, e sarà uguale ad essa; onde ancor tutto il triangolo ABC si adatterà a tutto il triangolo DEF, e gli sarà uguale, e gli altri angoli si adatteranno agli altri angoli, e saranno uguali ad essi, cioè l'angolo ABC all'angolo DEF, e l'angolo ACB all'angolo DFE; adunque, se due triangoli hanno due lati uguali a due lati, l'uno all'altro, ed hanno un angolo uguale ad un angolo, che è contenuto da linee rette uguali, averanno ancor la base uguale alla base, ed il triangolo sarà uguale al triangolo, e gli altri angoli a gli altri angoli, l'uno all'altro,

tro, a' quali sono sottoposti i lati uguali, lo che bisognava dimostrare.

TEOREMA II.

PROPOSIZIONE V.

Gli angoli de' triangoli equicruri sopra la base sono uguali fra loro, e prolungandosi le linee rette uguali, gli angoli sotto la base saranno ancora fra loro uguali.



Sia il triangolo equicrure ABC, ch'abbia il lato AB uguale al lato AC, e si prolunghino le rette linee BD, CE per diritto alle AB, AC. Dico l'angolo ABC esser uguale all' angolo ACB, e l' angolo CBD all' angolo BCE. Piglisi nella linea BD qualsivoglia punto F, e dalla maggiore AE taglisi AG uguale alla minore AF; e congiungansi FC, GB. Perchè dunque la AF è uguale alla AG, e la AB alla AC, le due FA, AC

A C sono uguali alle due G A, A B, l'una all'altra, e contengono l'angolo comune F A G, onde la base F C è uguale alla base G B; ed il triangolo A F C uguale al triangolo A G B, e gli altri angoli saranno uguali agli altri angoli, l'uno all'altro, a' quali sono sottoposti i lati uguali, cioè l'angolo A C F uguale all'angolo A B G, e l'angolo A F C all'angolo A G B, e perchè tutta la linea A F è uguale a tutta la A G delle quali la parte A B è uguale alla parte A C, sarà la rimanente ancor B F uguale alla rimanente C G, ma la F C fu mostrata uguale alla G B, adunque le due B F, F C sono uguali alle due C G, G B l'una all'altra, e l'angolo B F C uguale all'angolo C G B, e la base di essi B C è comune, il triangolo dunque B F C sarà uguale al triangolo C G B, e gli altri angoli agli altri angoli, l'un all'altro, a' quali sono sottoposti i lati uguali, adunque l'angolo F B C è uguale all'angolo G C B, e l'angolo B C F all'angolo C B G, e perchè tutto l'angolo A B G è stato dimostrato uguale a tutto l'angolo A C F, de' quali l'angolo C B G è uguale all'angolo B C F, sarà il rimanente A B C uguale al rimanente

Per l'ant.

3. com. not.

Per l'ant.

3. com. not.

A C B,

ACB, e ſono ſopra la baſe del triangolo ABC, e fu dimoſtrato l'angolo FBC uguale all'angolo GCB, quali ſono ſotto la baſe; gli angoli dunque de' triangoli equicruri ſopra la baſe ſono uguali fra loro, e prolungate le rette linee uguali, gli angoli ſotto la baſe ſaranno ancora fra loro uguali, lo che era biſogno di moſtrare.

AVVERTIMENTO.

MA perchè la dimoſtrazione dell'antecedente propoſizione attribuita da Proclo a Talete, arrecar ſuole a' Principianti nella Geometrìa sì gran difficultà, che riuſcendo talora malagevole a molti il paſſarla felicemente, e ſenza inciampo, alcuni non proſeguiſcono più oltre il viaggio loro; ſovvenne a Vincenzio Viviani altra maniera più facile di dimoſtrare in primo luogo la prima parte ſolo di tal propoſizione, poichè la prova della ſeconda egli vedde, che ſi poteva immediatamente cavare dalla Propoſizione 13. di queſto libro ſenza biſogno ſin quivi d'uſarla mai, perciò è paruto bene inſerirla in queſto luogo, ſapendo, che non ſolo Vincenzio Viviani, che ne fu l'inventore, ma *ancora molt' altri sono stati soliti di spiegarla, e darla nel modo, che segue, dependendo tutta dalla passata 4. Proposizione.*

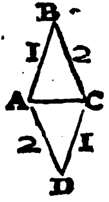
Prima parte dell' antecedente Proposizione.

IN ogni triangolo equicrure gli angoli sopra la base sono uguali fra loro.

DEl triangolo ABC sienò i lati uguali BA, BC. Dico, che gli angoli BAC, BCA sopra la base AC sono tra loro uguali.

Immaginiamoci rivoltarsi il triangolo ABC intorno la sua base AC, e cadere dalla parte contraria in ADC, in modo, che il lato AB cada in AD, il CB in CD, siccome l' angolo B in D, l' angolo BAC in DAC, e 'l BCA in DCA.

Quì è manifesto, che essendo AB uguale ad AD, e CB a CD, e i due AB, CB, dati uguali, anco i due AD, CD saranno uguali, e perciò tutti quattro uguali: onde per nostra comodità potremo ne' triangoli ABC,



ADC

ADC contrassegnare i lati a modo nostro, e dire, che il lato AB nel primo è uguale al lato CD nel secondo, il CB nel primo all' AD nel secondo, e l' angolo compreso ABC nel primo, è uguale all' angolo CDA nel secondo (per esser questo per così dire l' impronta di quello) sicchè, per la precedente quarta Proposizione, gli angoli rimanenti opposti a' lati uguali sono uguali: cioè l' angolo, per esempio, BAC, nel primo triangolo, opposto al lato BC segnato 2, è uguale all' angolo DCA nel secondo, opposto al lato DA segnato 2: ma ancora l' angolo BCA del primo è uguale all' angolo medesimo DCA del secondo (per esser questo ancora la stampa, o l' impronta di quello) adunque se l' uno, e l' altr' angolo BAC, BCA è uguale al medesimo DCA, quei due saranno fra loro uguali, e sono sopra la base AC del dato triangolo equicrure ABC. Adunque è manifesto quanto si propose di dimostrare.

TEOREMA III.

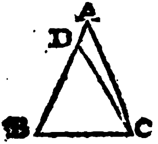
PROPOSIZIONE VI.

Se due angoli d' un triangolo sieno uguali fra loro,

eziandio

eziandio i lati, che sono sottoposti agli uguali angoli, saranno fra loro uguali.

Sia il triangolo ABC, che abbia l'angolo ABC uguale all' angolo ACB. Dico ancor il lato AB essere uguale al lato AC, percioccbè, se la AB non è uguale alla AC, una di esse sarà maggiore, sia maggiore la AB, e dalla maggiore AB taglisi la DB uguale alla minore AC, e giungasi DC, perchè dunque la DB è uguale alla AC, e la BC è comune, saranno le due DB, BC uguali alle due AC, CB, l'una all'altra, e l'angolo DBC è uguale all'angolo ACB, onde la base DC è uguale alla base AB, ed il triangolo DBC uguale al triangolo ACB, il minore al maggiore, che è inconveniente; non è dunque la AB disuguale alla AC, ma sarà uguale, e però, se due angoli d'un triangolo siano uguali fra loro, eziandio i lati, che sono sottoposti agli uguali angoli, saranno fra loro uguali, lo che bisognava dimostrare.



3. di ques.

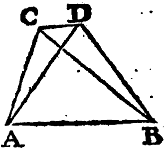
4. di ques.

Nel-

TEOREMA IV.

PROPOSIZIONE VII.

Nella medeſima retta linea non ſi coſtituiranno in diverſi punti due linee rette uguali a due medeſime rette linee, l'un' all' altra, dalle medeſime parti, che abbiano i medeſimi termini, che le prime.



Coſtituiſcanſi, ſe ſia poſſibile, nella medeſima retta linea A B a due medeſime linee rette A C, C B due altre rette linee uguali A D, D B l'una all' altra in diverſi punti C D, dalle medeſime parti come C D, ch' abbiano li medeſimi termini A B, che le prime rette linee, dimodochè la C A ſia uguale alla D A, qual' ha il medeſimo termine A, e la C B ſia uguale alla D B, che ha il medeſimo termine B, e giungaſi C D, perchè dunque la A C è uguale alla A D, ſa-

5. di queſ.

rà

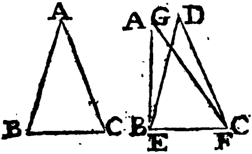
rà ancor l'angolo ACD uguale all'angolo ADC, onde l'angolo ADC è maggiore dell'angolo DCB, e però l'angolo CDB sarà molto maggiore dell'angolo DCB; oltre a ciò, perchè la CB è uguale alla DB, eziandío l'angolo CDB sarà uguale all'angolo DCB, ma si è dimostrato assai maggiore di esso, che è impossibile, adunque nella medesima retta linea non si costituiranno in diversi punti due linee rette uguali a due medesime rette linee, l'una all'altra, dalle medesime parti, ch'abbiano i medesimi termini, che le prime, lo che bisognava dimostrare.

TEOREMA V.

PROPOSIZIONE VIII.

Se due triangoli hanno due lati uguali a due lati, l'uno all'altro, ed hanno la base uguale alla base, averanno ancora l'angolo contenuto da uguali lati, uguale all'angolo

Siano due triangoli ABC, DEF, che abbiano due lati AB, AC uguali a due lati DE, DF, l' uno all' altro, dimodochè AB sia uguale a DE, ed AC a DF, ed abbiano la base BC uguale alla base EF. Dico ancor l'angolo BAC essere uguale all' angolo EDF. Perciocchè stando il triangolo ABC sopra il triangolo DEF, e posto il punto B sopra E, e la linea retta BC sopra la EF, eziandío il punto C sopra il punto F, perchè la BC è uguale alla EF. Onde stando BC sopra EF, staranno ancora le BA, AC sopra le ED, DF, perchè, se la base BC sarà posta sopra la base EF, ed i lati BA, AC non siano posti sopra i lati ED, DF, ma si permutino, come EG, GF, saranno costituite nella medesima retta linea in diversi punti due linee rette uguali a due medesime rette linee, l' una all'altra, dalle medesime parti, che hanno i medesimi termini; ma non si costituiscono, come si è dimostrato; non è dunque vero, che se la base BC è sopra la base EF, non siano i la-



Per l'ant.

i lati BA, AC sopra i lati ED, DF, adunque converranno insieme, e l'angolo BAC sarà sopra l'angolo EDF, e gli sarà uguale, onde se due triangoli hanno due lati uguali a due lati, l'uno all'altro, ed hanno la base uguale alla base, averanno ancora l'angolo contenuto da uguali lati, uguale all'angolo, lo che bisognava dimostrare.

PROBLEMA IV.

PROPOSIZIONE IX.

Dividere per mezzo un angolo rettilineo dato.

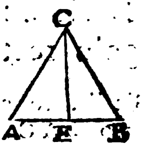
Sia il dato angolo rettilineo BAC, bisogna dividerlo per mezzo. Piglisi nella linea AB qualsisia punto D, e dalla linea AC taglisi la AE uguale alla AD, e giunta DE costituiscasi sopra essa il triangolo equilatero DEF, e giungasi AF. Dico l'angolo BAC essere diviso per mezzo dalla linea retta AF; percioсchè essendo la AD uguale alla AE, e la AF comune saranno le due DA, AF uguali al- 3. di ques. 1. di ques.

Per l'ant. le due EA, AF, l'una all'altra, e la base DF è uguale alla base EF, adunque l'angolo DAF, è uguale all'angolo EAF, e però l'angolo rettilineo dato BAC è diviso per mezzo dalla linea retta AF, lo che bisognava fare.

PROBLEMA V.

PROPOSIZIONE X.

Dividere per mezzo una data retta linea terminata.



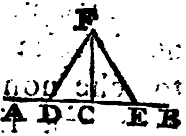
Sia la data retta linea terminata AB, *1. di ques.* bisogna dividerla per mezzo. Costituiscasi sopra essa il triangolo *L'ant.* equilatero ABC, e l'angolo ACB dividasi per mezzo colla linea retta CE, Dico la linea retta AB esser divisa per mezzo nel punto E, perciocchè essendo la AC uguale alla CB, e la CE comune, le due AC, CE sono uguali alle due BC, CE, l'una all'altra, e l'angolo ACE è *4. di ques.* uguale all'angolo BCE, adunque la base AE è uguale alla base BE, e però la linea retta terminata AB è divisa per mezzo nel punto E, lo che bisognava fare.

PRO-

PROBLEMA VI.

PROPOSIZIONE XI.

Tirare una linea retta perpendicolare da una data retta linea da un punto dato in essa.



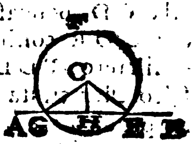
Sia la data retta linea A B, ed il punto dato in essa C, bisogna dal punto C tirare una linea retta perpendicolare alla A B. Piglisi nella A C qualsivoglia punto D, ed alla C D, pongasi uguale la C E, e sopra D E costituiscasi il triangolo equilatero F D E, e congiungasi C F. Dico esser tirata una linea retta F C perpendicolare alla retta data A B dal punto C dato in essa; percioche essendo la D C uguale alla C E, e la F C comune, saranno le due D C, C F, uguali alle due E C, C F, l'una all'altra; e la base D F è uguale alla base F E, adunque l'angolo D C F è uguale all'angolo E C F, e sono conseguenti, ma quando la linea retta stando sopra un'altra linea retta 3. di ques. 1. di ques. 8. di ques. Diff. 10.

fa gli angoli confeguenti uguali fra loro, ciafcuno degli angoli uguali è retto, adunque ciafcuno di effi DCF, FCE è retto, e però fi è tirata la linea retta FC perpendicolare alla data retta linea AB dal punto C dato in effa, lo che bifognava fare.

PROBLEMA VII.

PROPOSIZIONE XII.

Sopra una data retta linea infinita da un punto dato, che non fia in effa, tirare una linea retta perpendicolare.



Sia la data retta linea infinita AB, e il dato punto C, che non fia in effa, bifogna fopra la data retta linea infinita AB dal punto dato C, che non è in effa, tirare una linea retta perpendicolare. Pigliſi dall'altra parte della linea retta AB qualfivoglia punto E, e dal centro C col-
post. 3. 10. di quef. l'intervallo CE defcrivafi il cerchio EFG, e la EG fia fegata per mezzo nel punto H; e giungafi CG,

CH,

CH, CE. Dico sopra la data retta linea infinita A B dal punto dato C, che non è in essa, essere tirata la C H perpendicolare; perciocchè essendo la G H uguale alla H E, e la H C comune; le due G H, H C sono uguali alle due E H, H C, l'una all'altra, e la base C G è uguale alla base C E, adunque l'angolo CHG è uguale all'angolo EHC, e sono conseguenti, ma quando la linea retta, stando sopra una linea retta, fa gli angoli conseguenti uguali fra loro, ciascuno degli angoli uguali è retto, e quella linea retta, che sta sopra, si chiama perpendicolare a quella, alla quale ella soprastà, adunque sopra la data retta linea infinita A B dal dato punto C, che non è in essa, si è tirata la perpendicolare C H, lo che bisognava fare *8. di quest.* *Diff. 10.*

TEOREMA VI.

PROPOSIZIONE XIII.

Quando una linea retta stando sopra un'altra retta linea fa gli angoli, o gli farà amendue retti, o uguali a due retti.

La linea retta AB stando sopra la retta CD faccia gli angoli CBA, ABD. Dico gli angoli CBA, ABD o essere due retti, o uguali a due retti. Perchè se CBA è uguale ad ABD, sono due retti, ma se nò, tirisi dal punto B sopra la CD la BE perpendicolare, adunque gli angoli CBE, EBD sono due retti, e perchè CBE è uguale alli due CBA, ABE, pongasi EBD comune, gli angoli dunque CBE, EBD sono uguali alli tre angoli CBA, ABE, EBD, similmente, perchè l'angolo DBA è uguale alli due angoli DBE, EBA, pongasi ABC comune, adunque gli angoli DBA, ABC sono uguali alli tre DBE, EBA, ABC, ma si è dimostrato ancor gli angoli CBE, EBD essere uguali alli medesimi tre, e quelle cose, che sono uguali ad una medesima, sono uguali fra loro, adunque eziandío gli angoli CBE, EBD sono uguali agli angoli DBA, ABC; e CBE, EBD sono due retti, onde gli angoli DBA, ABC saranno uguali a due retti, e però quando una linea retta stando sopra un'altra retta linea fa gli angoli, o gli

Diff. 10.

11. di quef.

1. com. not.

gli farà amendue retti, o uguali a due retti, lo che bisognava dimostrare.

TEOREMA VII.

PROPOSIZIONE XIV.

Se ad una retta linea, e ad un punto, che sia in essa, due linee rette non poste dalle medesime parti, facciano gli angoli conseguenti uguali a due retti, esse linee saranno per diritto fra loro.

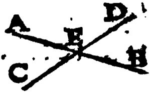
Ad una retta linea AB, ed al punto B, che è in essa due linee rette BC, BD non poste dalle medesime parti facciano gli angoli conseguenti uguali a due retti ABC, ABD. Dico la BD essere per diritto alla CB; perciocchè se la BD non è per diritto alla CB, sia la BE per diritto alla CB, perchè dunque la linea retta AB sta sopra la retta CBE, gli angoli ABC, ABE sono uguali a due retti; ma eziandio gli angoli ABC, ABD sono uguali a due retti, onde gli angoli CBA, ABE faranno uguali alli CBA, ABD, (5) Per l'ass. il rimatraggasi lo ABC comune, il rimanente dunque ABE è uguale al rimanente ABD, il minore al maggiore; che non può essere, adunque la BE non è per diritto alla BC, dimostreremo similmente non essere alcun altra, fuori, che la BD, adunque la CB sarà per diritto alla BD, e però se ad una retta linea, e ad un punto, che sia in essa, due linee rette non poste dalle medesime parti facciano gli angoli conseguenti uguali a due retti, esse linee saranno per diritto fra loro, lo che bisognava dimostrare.

TEOREMA VIII.

PROPOSIZIONE XV.

Se due linee rette si seghino insieme, faranno gli angoli, che sono alla cima, uguali fra loro.

Due linee rette AB, CD si seghino insieme nel punto E, dico l'an-l' angolo AEC essere uguale all' angolo DEB, e l' angolo CEB all' angolo AED. Perchè



stando la linea retta AE sopra la retta CD, fa gli angoli CEA, AED, saranno uguali a due retti, similmente, perchè la linea retta DE stando sopra la retta AB fa gli angoli AED, DEB, saranno AED, DEB uguali a due retti, e si è dimostrato ancora gli angoli CEA, AED esser uguali a due retti; adunque gli angoli CEA, AED sono uguali agli angoli AED, DEB, traggasi il comune AED, adunque ancora il rimanente CEA è uguale al rimanente BED. Si dimostreranno parimente uguali CEB, DEA, e però se due linee rette si seghino insieme, saranno gli angoli, che sono alla cima, uguali fra loro, lo che bisognava dimostrare.

13. di quest.

1. com. not.

3. com. not.

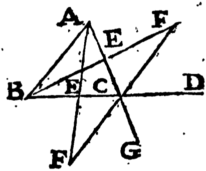
COROLLARIO.

Da questo chiaramente si vede, che quante linee rette insieme si segano, fanno gli angoli, che sono nel ſegamento, uguali a quattro retti.

TEOREMA IX.

PROPOSIZIONE XVI.

Prolungandoſi un lato di ciaſcun triangolo, l'angolo eſteriore è maggiore dell'uno, e l'altro interiore, ed oppoſto.



Sia il triangolo A B C, ed un lato di eſſo BC ſi prolunghi nel D, dico l'angolo eſteriore ACD eſſer maggiore dell'uno, e l'altro interiore, ed oppoſto; cioè CBA, BAC. Seghiſi AC per mezzo nel punto E; e giunta BE prolunghiſi nel punto F, e pongaſi la EF uguale alla BE, giungaſi poi FC, perchè dunque la AE è uguale alla EC, e la BE alla EF; le due AE, EB ſono uguali alle due CE, EF, l'una all'altra, e l'angolo AEB è uguale all'angolo

3. di queſ.

Per l'ant.

lo FEC, perciocchè sono alla cima, onde la base AB è uguale alla base FC, ed il triangolo ABE al triangolo FEC, e gli altri angoli uguali agli altri angoli, l'uno all'altro, a' quali si sottopongono i lati uguali, adunque l'angolo BAE è uguale all'angolo ECF, ma l'angolo ECD è maggiore di ECF, l'angolo dunque ACD è maggiore dell'angolo BAE; e parimente segandosi la linea retta BC per mezzo, si dimostrerà l'angolo BCG, cioè ACD maggiore dell'angolo ABC, laonde prolungandosi un lato di ciascun triangolo, l'angolo esteriore è maggiore dell'uno, e l'altro interiore, ed opposto, lo che bisognava dimostrare.

4. di ques.

Per l'ant.

TEOREMA X.

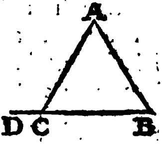
PROPOSIZIONE XVII.

Due angoli di ciascun triangolo, presi in qualunque modo, sono minori di due retti.

Sia il triangolo ABC. Dico due angoli del triangolo ABC, presi in qual-

qualsivoglia modo, esser minori di due retti. Prolunghisi la BC nel punto D, e perchè l'angolo ACD esteriore del triangolo ABC, è maggiore dell'interiore,

Per l'ant.



ed opposto ABC, pongasi comune lo ACB, adunque gli angoli ACD, ACB sono maggiori degli angoli ABC, BCA, ma gli angoli ACD, ACB sono uguali a due retti, che però ABC, BCA sono minori di due retti; dimostreremo similmente ancor gli angoli BAC, ACB, e CAB, ABC esser minori di due retti; adunque due angoli di ciascun triangolo, presi in qualunque modo, sono minori di due retti, lo che bisognava dimostrare.

13. di ques.

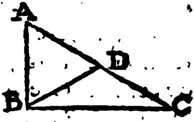
TEOREMA XI.

PROPOSIZIONE XVIII.

Il maggior lato di ciascun triangolo è sottoposto al maggiore angolo.

Sia il triangolo ABC, che abbia il lato AC maggiore del lato AB. Di-

Dico ancor l'angolo ABC esser maggiore dell'angolo BCA, perciocchè essendo la



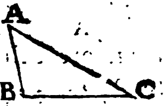
AC maggiore della AB, pongasi la AD uguale alla AB, e giungasi BD, e perchè del triangolo BDC l'angolo esteriore è ADB, sarà questo maggiore dell'interiore, ed opposto DCB, ma ADB è uguale ad ABD, essendo il lato AB uguale al lato AD, adunque l'angolo ABD è maggiore dell'angolo ACB, onde ABC sarà molto maggiore di ACB, e però il maggior lato di ciascun triangolo è sottoposto al maggior angolo, lo che bisognava dimostrare. *16. di ques.* *5. di ques.*

TEOREMA XII.

PROPOSIZIONE XIX.

Al maggior angolo di ciascun triangolo è sottoposto il maggior lato.

Sia il triangolo ABC, che abbia l'angolo ABC maggior dell'angolo BCA. Dico il lato AC essere



esser maggiore del lato A B, perciocchè, se non è maggiore, ovvero A C è uguale ad A B, ovvero è minore di esso, ma non è uguale, perchè ancor l'angolo A B C sarebbe uguale all' angolo A C B, che non è; e però A C non è uguale ad A B; ma nè anche è minore, perchè ancor l'angolo A B C sarebbe minore dell'angolo A C B, che non è, onde A C non è minore di A B, e si è dimostrato, che non è uguale, adunque A C è maggiore di A B, laonde al maggior angolo di ciascun triangolo è sottoposto il maggior lato, lo che bisognava dimostrare.

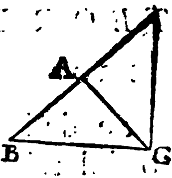
Per l'anti

TEOREMA XIII.

PROPOSIZIONE XX.

Due lati di ciascun triangolo presi in qualsivoglia modo sono maggiori del rimanente.

Sia il triangolo A B C. Dico due lati del triangolo A B C esser maggio-



giori del rimanente, presi in qualsivoglia modo, cioè i lati B A, A C maggiori del lato B C, ed i lati A B, B C maggiori del lato A C, ed i lati B C, C A essere maggiori di A B. Prolunghisi B A nel punto D, e pongasi A D uguale a C A, e giungasi D C, perchè dunque D A è uguale ad A C, sarà ancor l'angolo A D C uguale all'angolo A C D, ma l'angolo B C D è maggiore dell'angolo A C D, adunque l'angolo B C D è maggiore dell'angolo A D C, e perchè D C B è triangolo, che ha l'angolo B C D maggiore dell'angolo B D C, ed al maggior angolo è sottoposto il maggior lato, sarà il lato B D maggiore del lato B C, ma D B è uguale alli B A, A C, onde i lati B A, A C, sono maggiori di B C; dimostreremo similmente ancora i lati A B, B C esser maggiori del lato C A, ed i lati B C, C A maggiori di A B; adunque due lati di ciascun triangolo, presi in qualsivoglia modo, sono maggiori del rimanente, lo che bisognava dimostrare.

5. di quest.

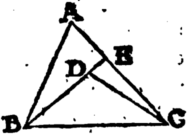
Per l'ant.

TEO-

TEOREMA XIV.

PROPOSIZIONE XXI.

Se da i termini d'un lato del triangolo si costituiscano due linee rette di dentro, queste saranno minori delli due lati del triangolo, ma conterranno l'angolo maggiore.



In un lato del triangolo A B C, cioè B C da i termini B, C costituiscansi di dentro due rette linee BD, DC. Dico B D, D C esser minori degli altri due lati del triangolo B A, A C, ma contenere l'angolo B D C maggiore dell'angolo B A C. Prolunghisi B D nel punto E, e perchè due lati di ciascun triangolo sono maggiori del rimanente, saranno i due lati B A, A E del triangolo A B E, maggiori del lato B E; pongasi E C comune, adunque B A, A C sono maggiori di B E, E C,

Per l'ant.

EC, similmente perchè i due lati CE, ED del triangolo CED sono maggiori del lato CD, pongasi comune DB, onde CE, EB sono maggiori di CD, DB, ma si è dimostrato BA, AC esser maggiori di BE, EC, adunque BA, AC sono molto maggiori di BD, DC; oltre a ciò, perchè l'angolo esteriore di ciascun triangolo è maggiore dell'interiore, ed opposto, sarà l'esteriore angolo BDC del triangolo CDE, maggiore di CED, per la medesima ragione ancor l'angolo esteriore CEB del triangolo ABE, è maggiore di BAC, ma l'angolo BDC si è dimostrato maggiore dell'angolo CEB, adunque l'angolo BDC sarà molto maggiore dell'angolo BAC, onde se dai termini di un lato del triangolo si costituiscano due linee rette di dentro, queste saranno minori delli due lati del triangolo, ma conterranno l'angolo maggiore, lo che bisognava dimostrare.

16. di quest.

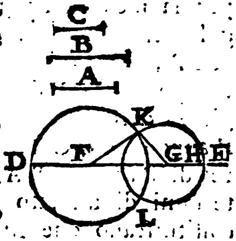
PROBLEMA VIII.

PROPOSIZIONE XXII.

Da tre linee rette, che siano uguali a tre rette li-

nee

nee date, costituire un triangolo, ma bisogna, che due siano maggiori della rimanente, prese in qualsivoglia modo; perciocchè due lati di ciascun triangolo, presi in qualsivoglia modo, sono maggiori del rimanente.



Siano tre linee rette date A, B, C, due delle quali siano maggiori della rimanente, prese in qualsivoglia modo, cioè, che le A, B siano maggiori della C, e le A, C siano maggiori della B, ed ancora le B, C maggiori dell' A, bisogna da tre linee rette uguali alle A, B, C costituire un triangolo. Propongasi la linea retta DE terminata nel punto D, ma infinita verso il punto E, e pongasi la DF uguale alla A, e la FG uguale alla B, e la GH alla C; e dal

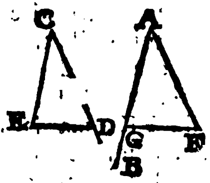
dal centro F coll'intervallo FD descrivasi il cerchio DKL, poi dal centro G coll'intervallo GH descrivasi un altro cerchio KLH, e giungansi KF, KG. Dico da tre linee rette uguali alle A, B, C essersi costituito il triangolo KFG; perciocchè essendo il punto F centro del cerchio DKL, sarà la FD uguale alla FK; ma la FD è uguale alla A, adunque ancor la FK è uguale ad A, oltre a ciò, perchè il punto G è centro del cerchio LKH, sarà la GH uguale alla GK, ma la GH è uguale alla C, adunque eziandío la GK è uguale alla C; ed è la FG uguale alla B, adunque le tre KF, FG, GK sono uguali alle tre rette A, B, C, e però delle tre linee rette KF, FG, GK, che sono uguali alle tre rette date A, B, C si è costituito il triangolo KFG, lo che bisognava fare.

PROBLEMA IX.

PROPOSIZIONE XXIII.

Nella data retta linea, e nel punto dato in essa co-

stituire un angolo rettilineo uguale a un altr' angolo rettilineo dato.



Sia la data linea AB, ed il punto dato in essa A, e l'angolo rettilineo dato DCE, bisogna nella data linea retta AB, e nel dato punto in essa A, costituire un angolo rettilineo dato. Piglisi nell'una, e l'altra di esse CD, CE quali si vogliano punti DE, e giungasi DE, e da tre linee rette, che siano uguali alle tre rette CD, DE, EC, costituiscasi il triangolo AFG, di modo, che la CD sia uguale alla AF, e la CE alla AG, e la DE alla FG, perchè dunque le due DC, CE sono uguali alle due FA, AG l'una all' altra, e la base DE è uguale alla base FG, sarà ancor l'angolo DCE uguale all' angolo FAG, adunque nella data retta linea AB, e nel punto in essa dato A, si è costituito l'angolo rettilineo FAG uguale all' altro angolo rettilineo dato DCE, lo che bisognava fare.

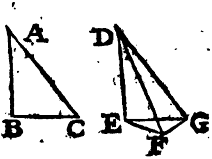
Per l' ant.

TEO-

TEOREMA XV.

PROPOSIZIONE XXIV.

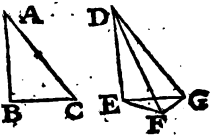
Se due triangoli hanno due lati uguali a due lati, l' uno all' altro, e l' angolo maggiore dell' angolo, che è contenuto da linee rette uguali, averanno ancora la base maggiore della base.



Siano due triangoli A B C, D E F, che abbiano due lati AB, A C uguali a due lati D E, D F, l' un all' altro, cioè il lato A B uguale al lato D E, ed il lato A C uguale a D F, e l' angolo B A C sia maggiore dell' angolo E D F. Dico ancora la base B C esser maggiore della base E F. Perchè l' angolo BAC è maggiore dell' angolo E D F, costituiscasi nella linea retta D E, e nel punto, che è in essa D, l' angolo E D G uguale all' angolo B A C, *Per l' ant.*

e pon-

e pongasi la DG uguale ad una di esse AC, DF, e giungansi GE, FG; onde perchè la AB è uguale alla DE, e la AC alla DG; le due BA, AC sono uguali alle due ED, DG, l'una all'altra, e l'angolo BAC è uguale all'angolo EDG; adunque la base BC è uguale alla base EG; oltre a ciò, perchè la DG è uguale alla DF,
4. di ques. e l'angolo DFG uguale all'angolo DGF, sarà l'angolo DFG maggiore dell'angolo EGF, l'angolo
5. di ques. dunque EFG è molto maggiore dell'angolo EGF, e perchè EFG è triangolo, che ha l'angolo EFG maggiore dell'EGF, ed al maggiore angolo è sottoposto il maggior lato, sarà ancora il lato EG maggiore del lato EF, ma il lato EG è uguale al lato BC, adunque ancora BC sarà maggiore di EF, laonde, se due triangoli hanno due lati uguali a due lati, l'uno all'altro, e l'angolo maggiore dell'angolo, che è contenuto da linee rette uguali, averanno ancora la base maggiore della base, lo che bisognava dimostrare.

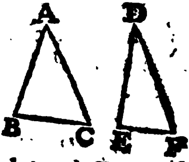


TEO-

TEOREMA XVI.

PROPOSIZIONE XXV.

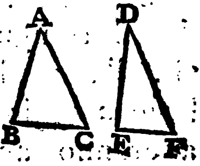
Se due triangoli hanno due lati uguali a due lati, l'uno all'altro, e la baſe maggiore della baſe, averanno ancora l'angolo maggiore dell'angolo, che da' lati uguali è contenuto.



Siano due triangoli A B C, D E F, che abbiano due lati A B, A C uguali a due lati D E, D F, l' uno all' altro, cioè il lato A B uguale al lato D E, ed il lato A C al lato D F, e la baſe B C ſia maggiore della baſe E F. Dico ancora l' angolo B A C eſſere maggiore dell' angolo E D F. Perciocchè, ſe non è maggiore, o è uguale, o minore; ma l' angolo B A C non è uguale all' angolo E D F, perchè eziandio la baſe B C ſarebbe uguale alla baſe E F, lo che non è, onde l' an- 4. di queſ.

golo B A C non è uguale all' angolo E D F: ma nè anche è minore, perchè la base B C sarebbe minore della base E F, che non è, adunque l' angolo B A C non è minore dell' angolo E D F, e si è dimostrato, che non è uguale, l' angolo dunque B A C necessariamente sarà maggiore dell' angolo E D F, e però se due triangoli hanno due lati uguali a due lati, l' uno all' altro, e la base maggiore della base, averanno ancora l' angolo maggiore dell' angolo, che è contenuto da lati uguali, lo che bisognava dimostrare.

Per l' ant.

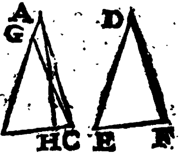


TEOREMA XVII.

PROPOSIZIONE XXVI.

Se due triangoli hanno due angoli uguali a due angoli, l' uno all' altro, ed un lato uguale ad un lato, che è fra gli angoli uguali, o che è sottoposto ad

uno degli uguali angoli, averanno ancora gli altri lati uguali agli altri lati, l'uno all'altro, e l'angolo rimanente uguale al rimanente.



Siano due triangoli ABC, DEF, che abbiano due angoli ABC, BCA uguali alli due DEF, EFD, l'uno all'altro, cioè l'angolo ABC uguale all'angolo DEF, e l'angolo BCA all'angolo EFD, ed abbiano un lato uguale ad un lato, e primieramente quello, che è fra gli angoli uguali, cioè il lato BC al lato EF. Dico ancora avere gli altri lati uguali agli altri lati, l'uno all'altro, cioè il lato AB al lato DE, ed il lato AC a DF, ed il rimanente angolo BAC uguale al rimanente EDF. Perciocchè se la AB non è uguale alla DE, una di esse sarà maggiore; sia maggiore AB; e pongasi la GB uguale alla DE, e giungansi GC. Perchè dunque la BG è uguale alla DE, e la BC alla EF, le due GB, BC sono uguali alle due DE, EF, l'una all'altra, e l'angolo GBC è uguale all'angolo DEF; adunque la base GC è uguale alla base DF, ed il triangolo GBC al triangolo DEF, e gli altri angoli uguali agli altri angoli, l'uno all'altro, a' quali sono sottoposti i lati uguali, adunque l'angolo GCB è uguale all'angolo DFE; ma l'angolo DFE si pone uguale all'angolo BCA, onde ancor l'angolo BCG è uguale all'angolo BCA il minore al maggiore, che non può essere; non è adunque la AB disuguale alla DE, e però sarà uguale, e la BC è uguale alla EF, onde le due AB, BC sono uguali alle due DE, EF, l'una all'altra, e l'angolo ABC è uguale all'angolo DEF, adunque la base AC è uguale alla base DF, ed il rimanente angolo BAC al rimanente EDF. Ma siano uguali quei lati, che si sottopongono agli angoli uguali, come BA a DE. Dico ancor gli altri lati essere uguali agli altri lati, cioè AC a DF, e BC ad EF, ed eziandio il rimanente angolo BAC uguale al rimanente EDF, perciocchè se la

4. di ques.

4. di ques.

BC non è uguale alla EF, una di esse è maggiore; sia maggiore la BC, se esser può, e pongasi la BH uguale alla EF, e giungasi AH, perchè dunque la BH è uguale alla EF, e la AB alla DE, le due AB, BH sono uguali alle due DE, EF, l'una all'altra, e contengono gli angoli uguali, adunque la base AH è uguale alla base DF, ed il triangolo ABH uguale al triangolo DEF, e gli angoli agli altri angoli, l'uno all'altro, a' quali sono sottoposti i lati uguali, l'angolo dunque BHA è uguale all'angolo EFD; ma l'angolo EFD è uguale all'angolo BCA, dunque ancor l'angolo BHA è uguale all'angolo BCA, onde l'angolo esteriore BHA del triangolo AHC è uguale all'interiore, ed opposto BCA, che non può essere, non però non è disuguale la BC alla EF, ma uguale, ed è la AB uguale alla DE, onde le due AB, BC sono uguali alle due DE, EF, l'una all'altra, e contengono gli angoli uguali, e perciò la base AC è uguale alla base DF, ed il trian-

4. di quest.

16. di quest.

triangolo A B C al triangolo D E F, e l'angolo rimanente B A C al rimanente E D F; adunque se due triangoli hanno due angoli uguali a due angoli, l'uno all'altro, ed un lato uguale ad un lato, o che è fra gli angoli uguali, o che è sottoposto ad uno degli uguali angoli, averanno ancora gli altri lati uguali agli altri lati, l'uno all'altro, e l'angolo rimanente uguale al rimanente, lo che bisognava dimostrare.

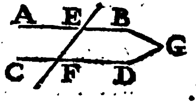
TEOREMA XVIII.

PROPOSIZIONE XXVII.

Se cadendo una linea retta sopra due linee rette fa gli angoli alterni uguali fra loro, saranno le linee rette paralelle.

La linea retta E F cadendo sopra le due linee rette A B, C D faccia gli angoli alterni A E F, E F D uguali fra loro. Dico la linea retta A B, essere paralella alla C D. Perciocchè, se non è paralella le A B, C D prolungate, o verso le parti B, D, o verso le A, C concorreranno insieme: prolunghinsi, e concorrano insieme dalle parti B, D nel punto G, l'angolo dunque esteriore A E F del triangolo G E F è maggiore dell' interiore, ed opposto E F G, ma è ancora uguale, lo che non può essere; adunque le A B, C D prolungate non concorreranno dalle parti B, D; si dimostrerà parimente non concorrere dalle parti A, C, e quelle, che non concorrono in alcuna delle parti, sono paralelle fra loro, onde la A B è paralella alla C D, se dunque cadendo una linea retta sopra due linee rette fa gli angoli alterni uguali fra loro, saranno le linee rette paralelle; lo che bisognava dimostrare.

16. *di ques.*

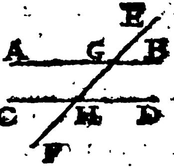


Diff. 35.

TEOREMA XIX.

PROPOSIZIONE XXVIII.

Se cadendo una linea retta sopra le due linee rette fa l'angolo esteriore uguale all' interiore, ed opposto, e dalle medesime parti, ovvero gl' interiori, e dalle medesime parti u-guali a due retti, le linee rette saranno paralelle fra loro.



Cadendo sopra due linee rette A B, C D la linea retta E F faccia l'angolo esteriore E G B u-guale all'interiore, ed opposto G H D, ovvero gli angoli interiori, e dalle medesime parti B G H, G H D uguali a due retti. Dico la linea retta A B esser paralella alla C D.
15. di ques. Perciocchè essendo l'angolo E G B uguale all'angolo G H D, e l'angolo E G B all'angolo A G H, sarà ancor l'angolo A G H uguale all'angolo G H D, e sono alterni;
Per l'ant. adunque la A B è paralella alla C D: oltre a ciò, perchè gli angoli B G H, G H D sono uguali a due retti, e sono ancora gli angoli A G H, B G H uguali a due retti, saranno gli angoli A G H, B G H uguali agli angoli B G H, G H D,

GHD, traggasi il comune BGH, adunque il rimanente AGH è uguale al rimanente GHD, e sono alterni; onde la AB sarà parallella alla CD. Se dunque cadendo una linea retta sopra due linee rette fa l'angolo esteriore uguale all'interiore, ed opposto, e dalle medesime parti, ovvero gl'interiori, e dalle medesime parti uguali a due retti, le linee rette saranno parallelle frà loro, lo che bisognava dimostrare.

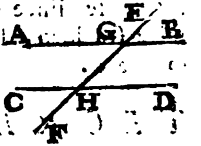
TEOREMA XX.

PROPOSIZIONE XXIX.

Cadendo una linea retta sopra le linee rette paralelle, farà gli angoli alterni uguali fra loro, e l'esteriore uguale all'interiore, ed opposto, e dalle medesime parti, e gli interiori, e dalle medesime parti uguali a due retti.

Cada sopra le linee rette paralelle AB, CD la linea retta EF.

Dico, che sarà gli angoli alterni AGH, GHD uguali fra loro, e l'esteriore EGB uguale all'interiore, ed opposto, e dalle medesime parti GHD, e gl'interiori, e dalle medesime parti BGH, GHD uguali a due retti. Perciocchè, se non è uguale AGH a GHD, uno di essi sarà maggiore. Sia maggiore AGH; e, perchè l'angolo AGH è maggiore dell'angolo GHD, pongasi BGH comune: gli angoli dunque AGH, BGH sono maggiori degli angoli BGH, GHD; ma gli angoli AGH, BGH sono uguali



13. di ques. a due retti, adunque gli angoli BGH, GHD sono minori di due retti, e quelle linee rette, che da'

Post. 5. minori di due retti si prolungano in infinito, concorrono fra loro; onde le linee rette AB, CD prolungate fra loro concorreranno; ma non concorrono, ponendosi paralelle, non è dunque l'angolo AGH disuguale all'angolo GHD, onde

15. di ques. è necessario, che sia uguale: ma l'angolo AGH è uguale all'angolo EGB, e però ancor EGB sarà uguale a GHD, pongasi BGH

cotornasse, adunque gli angoli E G B, B G H sono uguali agli angoli B G H, G H D, ma gli angoli E G B, B G H sono uguali a due retti; adunque eziandio i B G H, G H D saranno uguali a due retti; e però cadendo una linea retta sopra le linee rette paralelle farà gli angoli alterni uguali fra loro, e l'esteriore uguale all'interiore, ed opposto, e dalle medesime parti, e gl'interiori, e dalle medesime parti, uguali a due retti, lo che bisognava dimostrare. 13. di quest.

TEOREMA XXI.

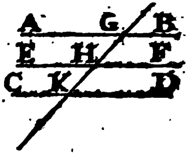
PROPOSIZIONE XXX.

Quelle linee, che sono paralelle alla medesima retta linea, saranno anche fra loro paralelle.

Siano amendue le A B, C D paralelle alla E F. Dico ancor la A B alla C D esser paralella. Cada sopra esse la linea retta G K, e perchè sopra le linee rette paralelle A B, E F cade la linea retta G K, l'angolo A G H è uguale all'angolo G H F. Poi, perchè sopra le Per l'ant.

linee rette paralelle EF, CD cade la linea retta GK, l'angolo GHF è uguale all' angolo GKD, e si è dimostrato l'angolo AGH uguale all' angolo GHF, adunque ancor l'angolo AGH sarà uguale all' angolo GKD, e sono alterni, onde la AB è paralella alla CD, e però quelle linee, che sono paralelle alla medesima linea retta, saranno anche paralelle fra loro, lo che bisognava dimostrare.

27. di ques.



PROBLEMA X.

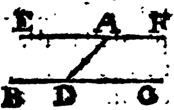
PROPOSIZIONE XXXI.

Per un punto dato tirare una linea retta paralella ad una data retta linea.

Sia il dato punto A, la data retta linea BC, bisogna per lo punto A tirare una linea retta paralella alla BC. Piglisi nella BC qualsivoglia punto D, e giungasi AD, e nella linea retta DA, e nel punto in essa A costituiscasi l' angolo

DAE

DAE uguale all'angolo ADC, e per diritto alla EA prolunghisi la linea retta AF. Perchè dunque la linea retta AD cadendo sopra le due linee rette BC, EF fa gli angoli alterni BAD, ADC uguali fra loro, sarà la EF parallella alla BC, adunque per lo dato punto A si è tirata la linea retta EAF, paralella alla retta linea BC, lo che bisognava fare. 23. di quest. 27. di quest.



TEOREMA XXII.

PROPOSIZIONE XXXII.

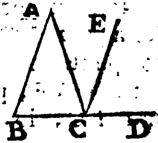
L' angolo esteriore di ciascun triangolo, prolungandosi un lato, è uguale alli due interiori, ed opposti, ed i tre angoli interiori del triangolo sono uguali a due retti.

Sia il triangolo ABC, ed un lato di esso BC prolunghisi nel punto D. Dico l' angolo esteriore ACD essere uguale alli due interiori, ed op-

opposti CAB, ABC, e i tre angoli interiori ABC, BCA, CAB del triangolo essere uguali a due retti. Tirisi per lo punto C la CE paralella alla linea retta AB; e perchè la AB è paralella alla CE, ed in esse cade la CA, gli angoli alterni BAC, ACE sono uguali fra loro; oltre a ciò, perchè la AB è paralella alla CE, ed in esse cade la linea retta BD, l'angolo esteriore ECD è uguale all'interiore, ed opposto ABC, e si è dimostrato l'angolo ACE uguale all'angolo BAC, onde tutto l'esteriore angolo ACD è uguale alli due interiori, ed opposti BAC, ABC; pongasi ACB comune, adunque gli angoli ACD, ACB sono uguali alli tre ABC, BCA, CAB; ma gli angoli ACD, ACB sono uguali a due retti, onde ancor ACB, CBA, CAB saranno uguali a due retti, adunque l'angolo esteriore di ciascun triangolo, prolungandosi un lato, è uguale alli due interiori, ed opposti, e i tre angoli interiori del triangolo sono uguali a due retti, lo che bisognava dimostrare.

Per l'ant.

29. di ques.

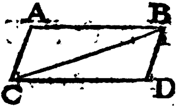


TEO-

TEOREMA XXIII.

PROPOSIZIONE XXXIII.

Quelle linee rette, che congiungono le uguali, e paralelle dalle medesime parti, ancor esse sono uguali, e paralelle.



Siano uguali, e paralelle AB, CD, e le linee rette AC, BD le congiungano dalle medesime parti. Dico le AC, BD essere uguali, e paralelle. Giungasi BC, perchè la AB è paralella alla CD, e cade in essa la BC, gli angoli alterni ABC, BCD sono uguali; oltre a ciò, perchè la AB è uguale alla CD, e la BC comune, le due AB, BC sono uguali alle due DC, CB, e l'angolo ABC è uguale all'angolo BCD, adunque la base AC è uguale alla base BD, ed il triangolo ABC al triangolo BCD, e gli angoli rimanenti sono uguali alli rimanenti, l'uno all'altro, a' quali si sottopongono i lati ugua- 29. di ques. 4. di ques.

uguali, onde l'angolo ACB è uguale all'angolo CBD, e perchè nelle due linee rette AC, BD cadendo la linea retta BC fa gli angoli alterni ACB, CBD uguali fra loro, la AC è paralella alla BD, e si è dimostrata uguale ad
27. di ques. essa, adunque quelle linee rette, che congiungono le uguali, e paralelle dalle medesime parti, anch'esse sono uguali, e paralelle, lo che bisognava dimostrare.

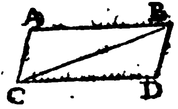
TEOREMA XXIV.

PROPOSIZIONE XXXIV.

Degli spazj paralellogrammi i lati, e gli angoli opposti sono fra loro uguali, ed il diametro gli sega per mezzo.

Sia il paralellogrammo ACDB, il cui diametro sia BC. Dico i lati opposti del paralellogrammo AC, DB, e gli angoli essere uguali fra loro, ed il diametro BC segargli per mezzo. Perciocchè, essendo la AB paralella alla CD, e cadendo in esse la linea retta BC, gli angoli

goli alterni A B C, B C D sono uguali fra loro; similmente, perchè la A C è parallela alla B D, ed in esso cade la B C, gli angoli alterni A C B, C B D sono uguali fra loro; sono adunque due triangoli A B C, C B D, che hanno due angoli A B C, B C A uguali a due angoli B C D, C B D, l'uno all'altro, ed un lato uguale ad un lato, che è fra gli angoli ugnali; commune ad amendue B C, adunque averanno ancora i lati rimanenti uguali alli rimanenti, l'uno all'altro, e l'angolo rimanente uguale al rimanente, e perciò il lato A B è uguale al lato C D, ed il lato A C a B D, e l'angolo B A C uguale all'angolo B D C; e perchè l'angolo A B C è uguale all'angolo B C D, e l'angolo C B D all'angolo A C B, farà tutto l'angolo A B D uguale a tutto A C D, e si è dimostrato l'angolo B A C uguale all'angolo B D C, adunque degli spazj parallelogrammi i lati, e gli angoli opposti sono uguali fra loro. Dico ancora il diametro segargli per mezzo, perciocchè essendo la A B uguale alla C D, e la 29. di quef. 25. di quef.



B C

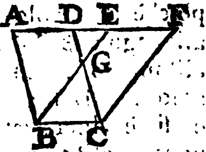
BC comune, le due AB, BC sono uguali alle due DC, CB, l'una all'altra, e l'angolo ABC uguale all'angolo BCD, e però la base AC è uguale alla base DB, ed il triangolo ABC uguale al triangolo BCD, adunque il diametro BC sega per mezzo il paralellogrammo ACDB, lo che bisognava dimostrare.

4. di ques.

TEOREMA XXV.

PROPOSIZIONE XXXV.

I paralellogrammi costituiti nella medesima base, e nelle medesime paralelle, sono fra loro uguali.



Siano i paralellogrammi ABCD, EBCF nella medesima base BC, e nelle medesime paralelle AF, BC. Dico il paralellogrammo ABCD essere uguale al paralellogrammo EBCF. Perciocchè, essendo ABCD paralellogrammo, la AD è uguale alla BC, e per la medesima ragione

ne

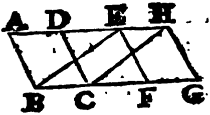
me la EF è uguale alla BC, onde la AD sarà uguale alla EF, e la DE è comune, adunque tutta la AE è uguale a tutta la DF, ed è la AB uguale alla CD, onde le due EA, AB sono uguali alle due FD, DC, l'una all'altra, e l'angolo FDC uguale all'angolo EAB, l'esteriore all'interiore, la base dunque EB è uguale alla base FC, ed il triangolo EAB uguale al triangolo FDC, traggasi il comune DGE, sarà il rimanente trapezio ABGD uguale al rimanente EGCF, pongasi il triangolo GBC comune, adunque tutto il parallelogrammo ABCD sarà uguale a tutto il parallelogrammo EBCF, e perciò i parallelogrammi costituiti nella medesima base, e nelle medesime paralelle sono fra loro uguali, locchè bisognava dimostrare. 4. di quest.

TEOREMA XXVI.

PROPOSIZIONE XXXVI.

I paralellogrammi costituiti nelle uguali basi, e nelle medesime paralelle sono uguali fra loro.

Sia-



Siano i paralellogrammi ABCD, EFGH costituiti nelle basi uguali BC, FG, e nelle medesime paralelle AH, BG. Dico il paralellogrammo ABCD essere uguale al paralellogrammo EFGH. Congiungasi BE, CH, e perchè la BC è uguale alla FG, e la FG alla EH, sarà ancora la BC uguale alla EH, e sono paralelle, e BE, CH le congiungono; ma quelle, che congiungono le uguali, e paralelle dalle medesime parti, anch'esse sono uguali, e paralelle, adunque le BE, CH sono uguali, e paralelle, onde EBCH è paralellogrammo, ed uguale al paralellogrammo ABCD, perchè ha la medesima base BC, ed è costituito nelle medesime paralelle BC, AH: per la medesima ragione il paralellogrammo EFGH è uguale al medesimo paralellogrammo EBCH, e però il paralellogrammo ABCD sarà uguale al paralellogrammo EFGH adunque i paralellogrammi costituiti nelle uguali basi, e nelle medesime paralelle sono uguali fra loro, lo che bisognava dimostrare.

34. di quest.

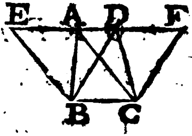
Per l'ant.

TEO-

TEOREMA XXVII.

PROPOSIZIONE XXXVII.

I triangoli costituiti nella medesima base, e nelle medesime paralelle sono uguali fra loro.



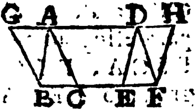
Siano i triangoli ABC, DBC nella medesima base BC, e nelle medesime paralelle AD, BC. Dico il triangolo ABC essere uguale al triangolo DBC. Prolunghisi la AD dall'una, e l'altra parte ne' punti E, F, e per B tirisi la BE paralella alla CA, e per C la CF paralella alla BD; adunque è parallellogrammo l'uno, e l'altro EBCA, DBCF; ed il parallellogrammo EBCA è uguale al parallellogrammo DBCF, perchè sono nella medesima base BC, e nelle medesime paralelle BC, EF; ed il triangolo ABC è la metà del parallellogrammo EBCA, conciossiacosachè il diametro AB lo seghi per mez- 31. di quest. 35. di quest.

34. di ques. mezzo: ed il triangolo DBC è la metà del paralellogrammo DBCF, segandolo per mezzo il diametro DC, e quelle cose, che sono la metà delle uguali, sono anche uguali fra loro, il triangolo dunque ABC è uguale al triangolo DBC, onde i
7. com. not. triangoli costituiti nella medesima base, e nelle medesime paralelle sono uguali fra loro, lo che bisognava dimostrare.

TEOREMA XXVIII.

PROPOSIZIONE XXXVIII.

I triangoli costituiti nelle uguali basi, e nelle medesime paralelle, fra loro sono uguali.



Siano i triangoli ABC, DEF nelle basi uguali BC, EF, e nelle medesime paralelle BF, AD. Dico il triangolo ABC esser uguale al triangolo DEF. Prolunghisi AD dall'una, e l'altra
31. di ques. parte ne' punti G, H, e per B tirisi BG paralella alla CA, e per

F ti-

F tirisi FH paralella alla DE; adunque l' uno, e l' altro di essi GBCA, DEFH è paralellogrammo, ed è il paralellogrammo GBCA uguale al paralellogrammo DEFH; perciocchè sono nelle basi uguali BC, EF, e nelle medesime paralelle BF, GH; ma il triangolo ABC è la metà del paralellogrammo GBCA, conciossiacosachè il diametro AB lo sega per mezzo, ed il triangolo DEF è la metà del paralellogrammo DEFH, segandolo per mezzo il diametro DF, e quelle cose, che sono la metà delle uguali, sono uguali fra loro; adunque il triangolo ABC è uguale al triangolo DEF: e però i triangoli costituiti nelle uguali basi, e nelle medesime paralelle fra loro sono uguali, lo che bisognava dimostrare.

36. di quest.

34. di quest.

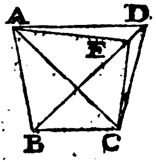
7. com. not.

TEOREMA XXIX.

PROPOSIZIONE XXXIX.

I triangoli uguali, costituiti nella medesima base, e dalle medesime parti, sono eziandio nelle medesime paralelle.

Sia-



Siano i triangoli uguali A B C, D B C nella medesima base B C, e dalle medesime parti. Dico essere ancora nelle medesime paralelle; giungasi A D. Dico la A D essere paralella alla B C; perciocchè, se non è paralella, tirisi per A la linea retta A E paralella alla B C, e giungasi E C, adunque il triangolo A B C è uguale al triangolo E B C, essendo nella medesima base B C, e nelle medesime paralelle B C, A E; ma il triangolo A B C è uguale al triangolo D B C, onde eziandio il triangolo D B C è uguale al triangolo E B C, il maggiore al minore, che non può essere, non è adunque A E paralella alla B C, similmente dimostreremo niuna altra essere paralella, fuor che la A D, adunque la A D è paralella alla B C, e però i triangoli uguali costituiti nella medesima base, e dalle medesime parti sono eziandio nelle medesime paralelle, lo che bisognava dimostrare.

31. di ques.

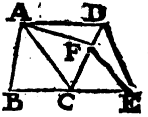
37. di ques.

TEO-

TEOREMA XXX.

PROPOSIZIONE XL.

I triangoli uguali costituiti nelle basi uguali, e dalle medesime parti, sono anche nelle medesime paralelle.

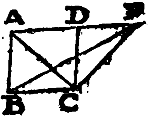


Siano i triangoli uguali ABC, CDE costituiti nelle basi uguali BC, CE. Dico eziandio essere nelle medesime paralelle; giungasi AD. Dico la AD esser paralella alla BE. Perchè, se non è, tirisi per A la AF paralella alla BE, e giungasi FE; adunque il triangolo ABC è uguale al triangolo FCE, essendo costituiti nelle basi uguali, e nelle medesime paralelle BE, AF, ma il triangolo ABC è uguale al triangolo DCE, onde ancor il triangolo DCE sarà uguale al triangolo FCE, il maggiore al minore, che non può essere; la AF dunque non è paralella alla BE; dimostreremo similmente non esser alcun' altra paralella, fuori che la AD, adunque la AD sarà paralella alla BE, e però i triangoli uguali costituiti nelle basi uguali, e dalle medesime parti, sono anche nelle medesime paralelle, lo che bisognava dimostrare.

TEOREMA XXXI.

PROPOSIZIONE XLI.

Se il paralellogrammo, ed il triangolo hanno la medesima base, e sono nelle medesime paralelle, il paralellogrammo è doppio del triangolo.



Il paralellogrammo ABCD, ed il triangolo FBC abbiano la medesima base BC, e siano nelle medesime paralelle BC, AF. Dico il paralellogrammo ABCD esser doppio del triangolo FBC. Giungasi AC,
37. di ques. adunque il triangolo ABC è uguale al triangolo FBC, perchè sono nella medesima base BC, e nelle

me-

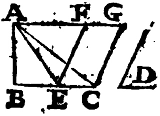
medesime paralelle BC, AF, ma il paralellogrammo ABCD è doppio del triangolo ABC, segandolo per mezzo il diametro AC, onde farà anche doppio di esso triangolo FBC, e però se il paralellogrammo, ed il triangolo hanno la medesima base, e sono nelle medesime paralelle, il paralellogrammo è doppio del triangolo, lo che bisognava dimostrare. 34. di quest.

PROBLEMA XI.

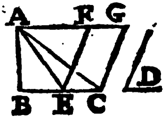
PROPOSIZIONE XLII.

Costituire nell' angolo rettilineo dato un paralellogrammo uguale al dato triangolo.

Sia il dato triangolo ABC, l' angolo rettilineo dato sia D, bisogna nell' angolo rettilineo uguale ad esso D costituire un paralellogrammo uguale al triangolo ABC. Seghisi BC per mezzo nel punto E, e giunta AE nella linea retta EC, e nel punto, ch' è



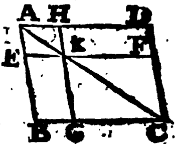
23. *di* in essa E costituiscasi l'angolo CEF,
ques. uguale all'angolo D, e per A tirisi la AG paralella alla EC, e per C tirisi la CG paralella alla FE, adunque FECG è paralellogrammo, e perchè la BE è uguale alla EC, sarà anche il triangolo ABE uguale al triangolo AEC, conciossiacosachè siano nelle basi uguali BE, EC, e nelle medesime paralelle BC, GA; il triangolo dunque ABC è doppio del triangolo AEC, ed è eziandio il paralellogrammo FECG doppio del triangolo AEC, perchè ha la medesima base, ed è nelle medesime paralelle, onde il paralellogrammo FECG è uguale al triangolo ABC: ed ha l'angolo CEF uguale all'angolo dato D, adunque si è costituito nell'angolo CEF, che è uguale al dato angolo D, il paralellogrammo FECG uguale al dato triangolo ABC, lo che bisognava fare.



TEOREMA XXXII.

PROPOSIZIONE XLIII.

In ogni ſpazio paralellogrammo i ſupplementi di quei paralellogrammi, che ſono d' intorno al diametro, ſono uguali fra loro.



Sia il paralellogrammo A B C D, il cui diametro A C: e d'intorno ad eſſo A C ſiano i paralellogrammi EH, FG; e quei, che ſi chiamano ſupplementi, B K, K D. Dico il ſupplemento B K eſſer uguale al ſupplemento K D. Perciocchè eſſendo A B C D paralellogrammo, ed il ſuo diametro A C, ſarà il triangolo A B C uguale al triangolo A D C, poi perchè EKHA è paralellogrammo, il cui diametro A K, ſarà il triangolo A E K uguale al triangolo A H K, e per la medeſima ragione il triangolo K G C è uguale al triangolo K F C, ſarà dunque il triangolo A E K inſieme col triangolo K G C uguale al trian- 34. di queſ.

golo AHK insieme con KFC, ed è tutto il triangolo ABC uguale a tutto il triangolo ADC, adunque il rimanente supplemento BK è uguale al rimanente KD, e però in ogni spazio parallelogrammo i supplementi di quei parallelogrammi, che sono d'intorno al diametro, sono uguali fra loro, lo che bisognava dimostrare.

PROBLEMA XII.

PROPOSIZIONE XLIV.

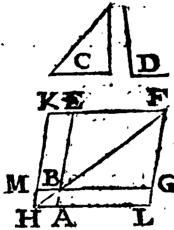
Alla data retta linea in un angolo rettilineo dato adattare un parallelogrammo uguale al dato triangolo.

Sia la data retta linea AB, ed il dato triangolo C, e l'angolo rettilineo dato D, bisogna alla data retta linea AB nell'angolo uguale a D adattare un parallelogrammo, che sia uguale al dato triango-
42. *di* lo C. Costituiscasi il parallelogram-
quest. mo BEKM uguale al triangolo C nell'angolo ÆBM, che sia uguale a D; e pongasi la BE per diritto

to alla AB: e per A tirisi la AH paralella ad una di esse BM, EK, e giungasi HB. Perchè dunque nelle paralelle AH, EK cade la linea retta HK, gli angoli AHK, HKE sono uguali a due retti, onde BHK, HKE sono minori di due retti: e quelle linee, che da angoli minori di due retti si prolungano in infinito, concorrono fra loro, adunque le HB, KE prolungate concorreranno. Prolunghinsi, e concorrano nel punto F, e per F tirisi la FL paralella ad una di esse EA, KH, e le AH, MB prolunghinsi ne i punti G, L, adunque KHLF è paralellogrammo, il cui diametro HF: e d'intorno ad HF sono i paralellogrammi MA, EG, ed i supplementi KB, BL, adunque LB è uguale a BK, ma ancora BK è uguale al triangolo G, onde eziandio sarà uguale al triangolo C, e perchè l'angolo MBE è uguale all'angolo ABG, ed anco è uguale all'angolo D, adunque alla data retta linea AB nell'angolo ABG, che è uguale

29. di ques.

5. P. st.



31. di ques.

Per l'ant.

 all'

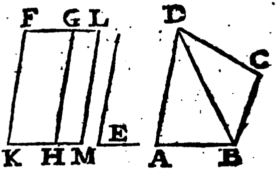
all' angolo D, si è adattato il parallellogrammo L B uguale al dato triangolo C, lo che bisognava fare.

PROBLEMA XIII.

PROPOSIZIONE XLV.

Costituire in un angolo rettilineo dato un parallellogrammo uguale ad un dato rettilineo.

Sia il dato rettilineo ABCD, e l' angolo rettilineo dato E, bisogna in



un angolo uguale ad E costituire un parallellogrammo uguale al rettilineo ABCD. Giungasi BD, e costituiscasi il parallellogrammo FH uguale al triangolo ADB nell' angolo HKF uguale ad E, e poi alla linea retta GH adattisi il parallellogrammo GM uguale al triangolo DBC nell' angolo GHM, che è uguale ad E, e perchè l' angolo E è uguale ad amendue HKF, GHM, sa-

42. di quest.

Per l' ant.

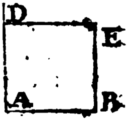
sarà anche HKF uguale a GHM, pongasi KHG comune, adunque gli angoli FKH, KHG sono uguali agli angoli KHG, GHM, ma FKH, KHG sono uguali a due retti, adunque KHG, GHM saranno uguali a due retti, e però nella linea retta GH, e nel dato punto H, che è in essa, le due linee rette KH, HM non poste dalle medesime parti fanno gli angoli conseguenti uguali a due retti, adunque la KH è per diritto alla HM, e perchè nelle paralelle KM, 14. di quef.
FG cade la linea retta HG, gli 29. di quef.
angoli alterni MHG, HGF sono uguali, pongasi HGL comune, gli angoli dunque MHG, HGL sono uguali agli angoli HGF, HGL, ma gli angoli MHG, HGL sono uguali a due retti, onde ancor gli angoli HGF, HGL saranno uguali a due retti, adunque la FG è 34. di
per diritto alla GL, e perchè la quef.
KF è uguale, e paralella alla HG, 30. di
ed ancor la HG alla ML, sarà la quef.
KF uguale, e paralella alla ML, e sono congiunte dalle linee rette KM, FL, adunque le KM, FL ancora sono uguali, e paralelle, onde KFLM è paralellogrammo, ed 33. di
essendo il triangolo ABD uguale quef.

al parallellogrammo HP, ed il triangolo DBC al parallellogrammo GM, sarà tutto il rettilineo ABCD uguale a tutto il parallellogrammo KFLM, si è dunque costituito nell' angolo FKM, che è uguale al dato angolo E, il parallellogrammo KFLM uguale al dato rettilineo ABCD, lo che bisognava fare.

PROBLEMA XIV.

PROPOSIZIONE XLVI.

Dalla data linea retta descrivere un quadrato.



Sia la data linea retta AB, bisogna dalla AB descrivere un quadrato. Tirisi la AC ad angoli retti sopra la AB dal punto A dato in essa, e pon-
31. *di* gasi la AD uguale alla AB, e per
ques. D tirisi la DE paralella alla AB, e per B la BE paralella alla AD. Adunque ADEB è parallellogrammo, e la AB è uguale alla DE, e la AD alla BE, ma ancora la BA è uguale alla AD, onde le quattro BA, AD, DE, EB sono uguali fra loro; e però il para-

ra-

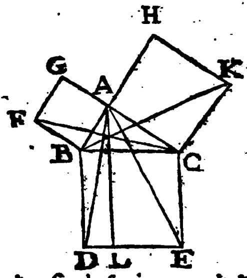
ralellogrammo A D E B è equilatero. Dico parimente esser rettangolo, perciocchè cadendo nelle paralelle A B, D E la linea retta A D, gli angoli B A D, A D E sono uguali a due retti, ma B A D è retto, adunque eziandio A D E sarà retto, e degli spazj paralellogrammi i lati, e gli angoli opposti sono uguali fra loro, e però ciascuno degli angoli opposti A B E, B E D è retto, ed A D E B è rettangolo; ma si è dimostrato ancora essere equilatero, laonde è necessario, che sia quadrato, e si è descritto dalla linea retta A B, lo che bisognava fare. *34. di quest.*

TEOREMA XXXIII.

PROPOSIZIONE XLVII.

Ne' triangoli rettangoli il quadrato, che si descrive dal lato sottoposto all'angolo retto, è uguale agli quadrati descritti da i lati, che l'angolo retto contengono.

Sia il triangolo rettangolo A B C, che abbia l' angolo B A C retto. Dico il quadrato descritto dalla retta B C essere uguale a-



gli quadrati, che si descrivono dalle B A, A C. Descrivasi dalla B C il quadrato B D E C, e dalle B A, A C i quadrati G B, H C: e per A tirisi A L paralella ad una di esse B D, C E: e giungasi A D, F C. Perchè dunque l' uno, e l' altro degli angoli B A C, B A G è retto, ad una linea retta B A, ed al dato punto in essa A due linee rette
14. *di ques.* A C, A G, non poste dalle medesime parti fanno gli angoli conseguenti uguali a due retti, adunque C A è per diritto alla A G; e per la medesima ragione la A B è per diritto alla A H, e perchè l' angolo D B C è uguale all' angolo F B A, essendo amendue retti, pongasi commune A B C, adunque tutto l' angolo D B A è uguale a tutto F B C, e perchè le due A B, B D sono uguali alle due F B, B C, l' una

al-

all'altra, e l'angolo DBA è uguale all'angolo FBC, sarà ancor la base AD uguale alla base FC, ed il triangolo ABD uguale al triangolo FBC, ed il paralellogrammo BL è doppio del triangolo ABD, perchè hanno la medesima base BD, e sono nelle medesime paralelle BD, AL; ed il quadrato GB è doppio del triangolo FBC, perchè anch'essi hanno la medesima base FB, e sono nelle medesime paralelle FB, GC, ma quelle cose, che sono doppie delle uguali, sono uguali fra loro, adunque il paralellogrammo BL è uguale al quadrato GB; e giunte parimente AE, BK si dimostrerà anche il paralellogrammo CL uguale al quadrato HC, tutto dunque il quadrato BDEC è uguale agli due quadrati GB, HC, e si descrive il quadrato BDEC dalla linea retta BC, ed i quadrati GB, HC dalle BA, AC, adunque il quadrato BE descritto dal lato BC è uguale agli quadrati descritti da i lati BA, AC, onde ne' triangoli rettangoli il quadrato, che si descrive dal lato sottoposto all'angolo retto, è uguale agli quadrati descritti da i lati, che l'angolo retto contengono, lo che bisognava dimostrare.

4. quest.

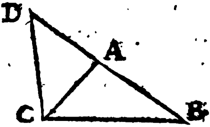
41. di quest.

TEO-

TEOREMA XXXIV.

PROPOSIZIONE XLVIII.

Se il quadrato descritto da uno de' lati del triangolo sia uguale a' quadrati, che si descrivono dagli altri lati, l'angolo contenuto dagli altri due lati del triangolo sarà retto.



Il quadrato, che si descrive da un lato BC del triangolo ABC sia uguale a' quadrati descritti dagli altri lati del triangolo BA, AC. Dico l'angolo BAC esser retto. Tirisi dal punto A la AD ad angoli retti sopra la AC, e pongasi la AD uguale alla BA, e giungasi DC, perchè dunque la DA è uguale alla AB, sarà anche il quadrato della DA uguale al quadrato della AB. Pongasi comune il quadrato della AC, adunque i quadrati delle DA, AC sono uguali a' quadrati delle BA, AC, AC, ma a' quadrati delle DA, AC è uguale il quadrato della DC, perchè l' angolo DAC è retto, ed a' quadrati delle BA, AC ſi pone uguale il quadrato della BC, adunque il quadrato della DC è uguale al quadrato della BC, e però il lato DC è uguale al lato CB; e perchè la DA è uguale alla AB, e la AC è comune, le due DA, AC ſono uguali alle due BA, AC, e la baſe DC è uguale alla baſe CB, l' angolo dunque DAC è uguale all' angolo BAC: e DAC 8. di è retto, onde ancor BAC ſarà ret- queſ. to, adunque ſe il quadrato deſcritto da uno de' lati del triangolo ſia uguale a' quadrati, che ſi deſcrivono dagli altri lati, l' angolo contenuto dagli altri due lati del triangolo ſarà retto, lo che biſognava dimoſtrare.

Fine del Primo Libro.

TEO-

DEGLI ELEMENTI D' EUCLIDE

TRADOTTI IN VOLGARE

LIBRO SECONDO.

DEFINIZIONI.

I.

Ogni paralellogrammo rettangolo si dice esser contenuto da due rette linee, che costituiscono l' angolo retto.

II.

In ogn' spazio paralellogrammo ciascuno de' paralellogrammi, che sono d' intorno al diametro di esso, con gli due supplemenmenti, si chiamerà Gnomone.

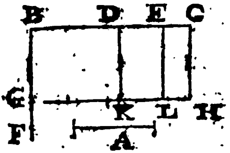
TEOREMA I.

PROPOSIZIONE I.

Se sono due linee rette, delle quali una sia segata in quante parti si vogliono, il rettangolo contenuto dalle due linee è uguale a i rettangoli, che si contengono dalla linea non segata, e da ciascuna parte dell'altra.

Siano due linee rette A, BC, e la BC sia segata in qualunque modo ne' punti D, E. Dico il rettangolo contenuto dalle linee rette A, BC essere uguale al rettangolo contenuto dalle A, BD, ed al rettangolo contenuto dalle A, DE, ed a quello, che si contiene dalle A, EC. Perciocchè tirisi dal punto B la BF ad angoli retti sopra la BC, e pongasi la BG uguale alla A, poi per

per G tirisi la GH paralella alla BC, e per D, E, C, tirinsi le DK, EL, CH paralelle alla BG, adunque il rettangolo BH è uguale a' rettangoli BK, DL, EH: ed è il rettangolo BH quello, che si contiene dalle A, BC, contenendosi dalle GB, BC, ed essendo la BG uguale alla A, ed il rettangolo BK è quello, che si contiene dalle A, BD; perciocchè si contiene dalle GB, BD, delle quali la GB è uguale alla A, ed il rettangolo DL è quello,



che si contiene dalle A, DE, conciossiachè DK, cioè BG sia uguale alla A, parimente il rettangolo EH è quello, che si contiene dalle A, EC, il rettangolo dunque contenuto dalle A, BC è uguale al rettangolo contenuto dalle A, BD, ed al contenuto delle A, DE, ed al contenuto dalle A, EC, onde se sono due linee rette, l'una delle quali sia segata in quante parti si vogliono, il rettangolo contenuto delle due linee è uguale a' rettangoli, che si contengono dalla linea retta non segata, e da ciascuna

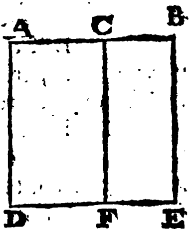
par-

parte dell' altra, lo che bisognava dimostrare.

TEOREMA II.

PROPOSIZIONE II.

Se una linea retta sia segata in qualsivoglia modo, i rettangoli contenuti da tutta la linea, e da ciascuna delle parti, sono uguali al quadrato, che si fa da tutta la linea.



La linea retta AB sia segata in qualsivoglia modo nel punto C. Dico, che il rettangolo contenuto dalle AB, BC insieme con quello, che si contiene dalle BA,
46. del prim. AC è uguale al quadrato di AB. Descrivasi dalla AB il quadrato
31. del prim. ADEB, e tirisi per C la CF parallela ad una di esse AD, BE, adunque il quadrato AE è uguale a' rettangoli AF, CE, ed è AE il

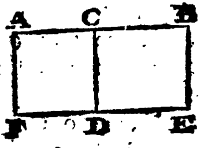
il quadrato di AB, ed il rettangolo AF è contenuto dalle BA, AC, contenendosi dalle DA, AC, delle quali AD è uguale ad AB, ed il rettangolo CE è contenuto dalle AB, BC, conciossiacosachè la BE sia uguale alla AB; onde il rettangolo BAC insieme col rettangolo ABC è uguale al quadrato di AB. Se dunque una linea retta sia segata in qualsivoglia modo, i rettangoli contenuti da tutta, e da ciascuna delle parti, sono uguali al quadrato di tutta la linea, lo che bisognava dimostrare.

TEOREMA III.

PROPOSIZIONE III.

Se una linea retta sia segata in qualunque modo, il rettangolo contenuto da tutta la linea, e da una parte di essa sarà uguale al rettangolo, che si contiene dalle parti, ed al quadrato, che si fa dalla detta parte.

La



La linea retta AB sia segata in qualunque modo nel punto C. Dico che il rettangolo ABC è uguale al rettangolo ACB insieme col quadrato, che si fa dalla BC. Descrivasi dalla BC il quadrato CDEB, e prolunghisi ED in F, e per A tirisi la AF paralella ad una di esse CD, BE, sarà il rettangolo AE uguale alli rettangoli AD, CE, ed il rettangolo AE è contenuto dalle AB, BC, perciocchè si contiene dalle AB, BE, delle quali BE è uguale alla BC: ed il rettangolo AD è contenuto dalle AC, CB, conciossiacosachè DC sia uguale alla CB, ed è DB il quadrato, che si fa dalla BC, laonde il rettangolo ABC è uguale al rettangolo ACB insieme col quadrato di BC. Se dunque una linea retta sia segata in qualunque modo, il rettangolo contenuto da tutta la linea, e da una parte di essa, sarà uguale al rettangolo, che si contiene dalle parti, ed al quadrato, che si fa dalla detta parte; lo che bisognava dimostrare.

46. del prim.

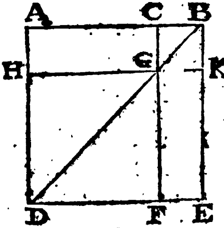
31. del prim.

TEO.

TEOREMA IV.

PROPOSIZIONE IV.

Se una linea retta sia segata in qualunque modo, il quadrato di tutta la linea sarà uguale agli quadrati delle parti, ed al rettangolo contenuto due volte dalle dette parti.



Sia la linea retta A B divisa in qualunque modo nel punto C. Dico che il quadrato di A B è uguale a' quadrati di A C, C B, ed a quel rettangolo, che si contiene due volte dalle A C, C B. Descrivasi dalla A B il quadrato A D E B, e giungasi B D, e per C tirisi C G F parallela ad una di esse A D, B E, e per G tirisi H K parallela ad una delle A B, D E. Perchè dunque la

46. del prim.

31. del prim.

C F

CF è paralella alla AD, ed in esse cade la BD, sarà l'angolo BGC esteriore uguale all'interiore, ed opposto ADB, ma l'angolo ADB è uguale all'angolo ABD, perchè il lato BA è uguale al lato AD, onde l'angolo CGB è uguale all'angolo GBC, e per tal cagione il lato BC è uguale al lato GC, ma ancora il lato CB è uguale al lato GK, e CG a BK, adunque eziandio GK è uguale a KB, e CGKB è equilatero. Dico oltre a ciò essere rettangolo, perchè essendo la CG paralella alla BK, ed in esse cade la CB, gli angoli KBC, GCB sono uguali a due retti, ed è retto l'angolo KBC, adunque eziandio GCB è retto, e retti sono gli angoli opposti CGK, GKB, onde CGKB è rettangolo, ma fu dimostrato, che è ancora equilatero, adunque CGKB è quadrato, che si fa da BC, e per la medesima ragione HF è quadrato, che si fa da HG, cioè da AC, laonde HF, CK

29. del prim.

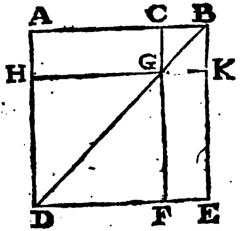
5. del prim.

6. del prim.

34. del prim.

29. del prim.

34. del prim.



sono

ſono quadrati di AC, CB, e perchè il rettangolo AG è uguale al rettangolo GE, ed è AG quello, che ſi contiene dalle AC, CB, conciofſiacoſachè GC ſia uguale a CB, ſarà ancora GE uguale a quello, che ſi contiene dalle AC, CB, onde i rettangoli AG, GE ſono uguali a quello, che due volte è contenuto dalle AC, CB, e ſono HF, CK i quadrati di AC, CB, quattro dunque HF, CK, AG, GE ſono uguali a' quadrati di AC, CB, ed al rettangolo, che due volte dalle AC, CB è contenuto, ma HF, CK, AG, GE ſono tutto il quadrato ADEB, che ſi fa da AB, il quadrato dunque di AB è uguale a' quadrati di AC, CB, ed al rettangolo, che due volte è contenuto dalle AC, CB, laonde ſe una linea ſia diviſa in qualunque modo, il quadrato di tutta la linea ſarà uguale a' quadrati delle parti, ed al rettangolo contenuto due volte dalle dette parti, e queſto è quello, che biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO.

Da questo si vede chiaramente, che negli spazj quadrati, i paralellogrammi, che sono d' intorno al diametro, sono ancora loro quadrati.

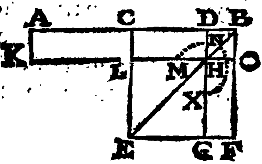
TEOREMA V.

PROPOSIZIONE V.

Se una linea retta sia segata in parti uguali, ed in parti disuguali, il rettangolo contenuto dalle parti disuguali, insieme col quadrato della linea, che è fra i segamenti, sarà uguale al quadrato della metà di tutta la linea.

Sia la linea retta AB segata in parti uguali nel punto C, ed in parti disuguali nel punto D. Dico, che

che il rettangolo contenuto dalle A D, D B insieme col quadrato di C D è uguale al quadrato di C B. Descrivasi da B C il quadrato CEFB, e giungasi B E, e per D tirisi la D H G paralella ad una di esse C E, B F, e per H tirisi K L O paralella ad una delle C B, E F, e finalmente per A tirisi A K paralella ad una delle C L, B O, e perchè il supplemento C H è uguale al supplemento H F, pongasi D O comune, adunque tutto il rettangolo C O è uguale a tutto D F, ma C O è uguale ad A L, conciossiacosachè A C sia uguale a C B, onde eziandio A L è uguale a D F, pongasi C H comune, sarà il tutto A H uguale a F D, D L, ma A H è contenuto dalle A D, D B, perciocchè D H è uguale a D B, ed F D, D L è lo gnomone M N X, adunque lo gnomone M N X è uguale al rettangolo, che è contenuto dalle A D, D B, pongasi L G comune, che è uguale al quadrato di C D, laonde lo gnomone M N X, ed L G sono uguali al rettangolo contenuto dalle



45. del prim.

36. del prim.

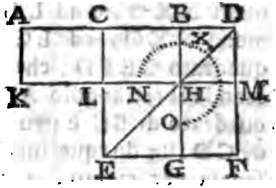
AD, DB, ed al quadrato di CD, ma lo gnomone MNX, ed LG sono tutto il quadrato CEFB, qual si fa da CB; adunque il rettangolo ADB insieme col quadrato di CD è uguale al quadrato di CB, se dunque una linea retta sia segata in parti uguali, ed in parti disuguali, il rettangolo contenuto dalle parti disuguali insieme col quadrato della linea, che è fra i segamenti, sarà uguale al quadrato della metà di tutta la linea, lo che bisognava dimostrare.

TEOREMA VI.

PROPOSIZIONE VI.

Se una linea retta sia segata per mezzo, e vi si aggiunga qualche altra linea per diritto, il rettangolo contenuto da tutta la linea colla giunta, e dalla giunta insieme col quadrato della metà, sarà uguale al quadrato, che si fa dalla metà, tà, e dalla giunta siccome da una linea sola.

Seghisi la linea retta AB per mezzo nel punto C, e aggiungavisi BD per diritto.



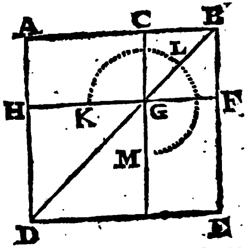
Dicò, che il rettangolo ADB insieme col quadrato di BC è uguale al quadrato, che si fa dalla CD. 46. del prim.
Descrivasi dalla CD il quadrato CEFD, e giungasi DE, e per B tirisi BHG paralella ad una di esse CE, DF, e per H tirisi KLM paralella ad una delle AD, EF, e finalmente per A tirisi AK paralella ad una delle CL, DM. 31. del prim.
Perchè dunque la AC è uguale alla CB, il rettangolo AL sarà uguale al rettangolo CH. Ma CH è uguale ad HF, onde AL sarà uguale ad HF, pongasi CM comune, adunque tutto il rettangolo AM è uguale allo gnomone NXO, e AM è contenuto dalle AD, DB, conciossiacosachè la DM sia uguale alla DB, e però lo gnomone NXO è uguale al rettangolo ADB, si- 36. del prim. 43. del prim.

milmente pongasi comune L G, che è uguale al quadrato di C B, adunque il rettangolo A D B, insieme col quadrato di CB, è uguale allo gnomone N X O, e ad L G, ma lo gnomone N X O, ed L G sono tutto il quadrato C E F D, che si fa da C D, laonde il rettangolo ADB insieme col quadrato di B C è uguale al quadrato di C D; se dunque una linea retta sia segata per mezzo, e vi si aggiunga qualche altra linea per diritto, il rettangolo contenuto da tutta la linea, colla giunta, e dalla giunta, insieme col quadrato della metà, sarà uguale al quadrato della metà, e della giunta, siccome di una sola linea; lo che bisognava dimostrare.

TEOREMA VII.

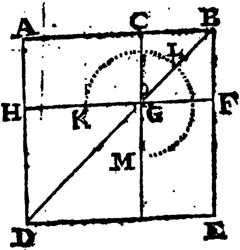
PROPOSIZIONE VII.

Se una linea retta sia segata in qualunque modo, i quadrati, che si fanno da tutta la linea, e da una parte, sono uguali al rettangolo contenuto due volte da tutta la linea, e dalla la detta parte insieme col quadrato dell' altra parte.



Sia la linea retta AB segata in qualunque modo nel punto C. Dico, che i quadrati di AB BC sono uguali al rettangolo contenuto due volte dalle AB, BC, ed al quadrato di AC. Descrivasi dalla AB il quadrato ADEB, e costituiscasi la figura. Perchè dunque il rettangolo AG è uguale al rettangolo GE, pongasi comune CF, onde tutto il rettangolo AF è uguale a tutto CE, e perciò i rettangoli AF, CE sono doppj del rettangolo AF, ma AF, CE sono lo gnomone KLM, ed il quadrato CF, adunque lo gnomone KLM, ed il quadrato CF sono doppj del rettangolo AF, e quello, che è contenuto due volte dalle AB, BC è doppio del rettangolo AF, percioc-chè la BF è uguale alla BC, adunque lo gnomone KLM, ed il qua- 46. del prim. 43. del prim.

drato CF sono uguali al rettangolo, che due volte dalle AB, BC è contenuto. Pongasi DG comune, che è il quadrato di AC, onde lo gnomone KLM, ed i quadrati BG, GD sono uguali à quello, che due volte è contenuto dalle AB, BC, ed al quadrato di AC, ma lo gnomone KLM, ed i quadrati BG, GD sono AD EB, e CF, cioè i quadrati di AB, BC, i quadrati dunque di AB, BC sono uguali al rettangolo, che è contenuto due volte dalle AB, BC insieme col quadrato di AC, laonde se una linea retta sia segata in qualunque modo, i quadrati, che si fanno da tutta la linea, e da una parte, sono uguali al rettangolo contenuto due volte da tutta la linea, e dalla detta parte, insieme col quadrato dell'altra parte, lo che bisognava dimostrare.



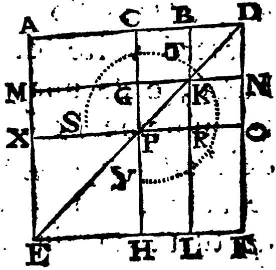
TEOREMA VIII.

PROPOSIZIONE VIII.

Se una linea retta sia segata in qualunque modo; il rettangolo contenuto quattro volte da tutta la linea, e da una delle parti insieme col quadrato dell' altra parte, sarà uguale al quadrato, che si fa da tutta la linea, e dalla detta parte, siccome da una linea sola.

Sia la linea retta A B segata in qualunque modo nel punto C. Dico, che il rettangolo contenuto quattro volte dalle A B, B C insieme col quadrato di A C à uguale al quadrato di A B, B C come di una linea sola. Prolunghisi la linea retta A B in D, e sia la B D uguale alla C B, e dalla A D descrivasi il quadrato A E F D, e facciasi la figura doppia. Perchè dunque la

34. del prim. CB è uguale alla BD, ed è la CB uguale alla GK, e la BD alla RN, sarà eziandío la GK uguale alla KN, e per la medesima ragione la PR è uguale alla RO, e perchè la CB è uguale alla BD, e la GK alla KN, sarà il rettangolo CK uguale al rettangolo KD ed il rettangolo GR al rettangolo RN. Ma CK è uguale ad RN, conciosiacosachè siano supplementi del paralellogrammo CO,



onde eziandío KD è uguale a GR, e quattro rettangoli DK, KC, GR, RN sono uguali fra loro, e però sono quadrupli del rettangolo CK: similmente perchè la CB è uguale alla BD, e la BD alla BK, cioè alla CG, e la CB alla GK, cioè alla GP, sarà ancor la CG uguale alla GP, ed è la PR uguale alla RO, adunque il rettangolo AG è uguale al rettangolo MP, ed il rettangolo PL al rettangolo RF, ma MP è ugua-

uguale a PL, essendo supplementi del parallellogrammo ML, e per tal cagione AG è uguale ad RF, onde i quattro AG, MP, PL, RF, fra loro sono uguali, e quadrupli di AG, e si è dimostrato, che i quattro CK, KD, GR, RN sono quadrupli di CK, otto dunque, che contengono lo gnomone STY, sono quadrupli di AK, e perchè AK è quello, che si contiene dalle AB, BC, essendo la BK uguale alla BC, sarà il contenuto quattro volte dalle AB, BC quadruplo di AK, e fu dimostrato lo gnomone STY quadruplo di AK, adunque quello, che è contenuto quattro volte dalle AB, BC è uguale allo gnomone STY. Pongasi comune XH, che è uguale al quadrato di AC, sarà quello, che è contenuto quattro volte dalle AB, BC, insieme col quadrato di AC uguale allo gnomone STY, ed al quadrato XH; ma lo gnomone STY, ed XH sono tutto il quadrato AEFD, che si descrive da AD, il rettangolo dunque, che si contiene quattro volte dalle AB, BC, insieme col quadrato di AC è uguale al quadrato di AD, cioè a quello, che si descrive dalle AB, BC, siccome da una sola linea; laonde, se una linea retta sia segata in qualunque modo, il rettangolo contenuto quattro volte da tutta la linea, e da una parte, insieme col quadrato dell'altra parte, sarà uguale al quadrato, che si fa da tutta la linea, e dalla detta parte, siccome da una linea sola, lo che bisognava dimostrare.

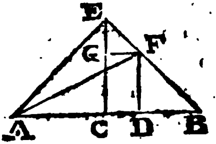
TEOREMA IX.

PROPOSIZIONE IX.

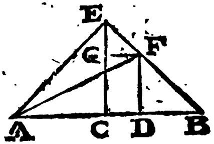
Se una linea retta sia segata in parti uguali, ed in parti disuguali, i quadrati, che si fanno dalle parti disuguali, sono doppi del quadrato della metà, e del quadrato di quella linea, che è fra i segamenti.

Sia la linea retta AB segata in parti uguali nel punto C, ed in parti disuguali nel D. Dico, che i quadrati di AD, DB sono doppj de' quadrati di AC, CD. Tirisi

risi dal punto C la CE ad angoli retti sopra la AB, e pongasi uguale all'una, e l'altra di esse AC, CB, e giungasi EA, EB. Poi per D tirisi la DF parallella alla CE, e per F tirisi la FG parallella alla AB, e giungasi AF. Perchè dunque la AC è uguale alla CE, sarà l'angolo EAC uguale all'angolo AEC, ed essendo retto l'angolo C, i rimanenti AEC, EAC saranno uguali ad un retto, e sono uguali fra loro, adunque l'uno, e l'altro di essi AEC, EAC è la metà d'un retto, e per la medesima ragione l'uno, e l'altro delli CEB, EBC è la metà d'un retto, onde tutto l'angolo AEB è retto, e perchè l'angolo GEF è la metà d'un retto, ed è retto EGF essendo uguale all'interiore, ed opposto EGB, sarà eziandio il rimanente EFG la metà d'un retto, onde l'angolo GEF è uguale all'angolo EFG, e però il lato EG è uguale al lato GF: similmente perchè l'angolo B è la metà d'un retto, ed FDB è retto, conciossiacosachè sia uguale al- 11. del prim. 32. del prim. 5. del prim. 32. del prim. 29. del prim. 6. del prim.



l'in-l' interiore, ed opposto ECB, sarà il rimanente BFD la metà d'un retto, l'angolo dunque B è uguale all'angolo DFB, ed il lato DF al lato DB, e perchè la AC è uguale alla CE, sarà anche il quadrato di AC uguale al quadrato di CE, onde i quadrati di AC, CE sono doppj del quadrato di AC, ma a i quadrati di AC, CE è uguale il quadrato di EA, per essere l' angolo ACE retto, adunque il quadrato di EA è



47. del prim.

doppio del quadrato di AC, oltre a ciò, perchè la EG è uguale alla GF, sarà il quadrato di EG uguale al quadrato di GF, e per tal cagione i quadrati di EG, GF sono doppj del quadrato di GF; ma a i quadrati di EG, GF è uguale il quadrato di EF, adunque il quadrato di EF è doppio del quadrato di GF, ed è GF uguale a CD, onde il quadrato di EF è doppio del quadrato di CD; ma eziandío il quadrato di AE è doppio del quadrato di AC, i quadrati dunque di AE, EF sono doppj de i quadrati di AC, CD, ed a i quadrati di di AE, EF è uguale il quadrato di AF, perciocchè l'angolo AEF è retto, adunque il quadrato di AF è doppio de i quadrati di AC, CD; ma al quadrato di AF sono uguali i quadrati di AD, DF, essendo l'angolo D retto; che però i quadrati di AD, DF sono doppj de i quadrati di AC, CD, ma la DF è uguale alla DB, i quadrati dunque di AD, DB sono doppj de i quadrati di AC, CD; laonde, se una linea retta sia segata in parti uguali, ed in parti disuguali, i quadrati, che si fanno dalle parti disuguali, sono doppj del quadrato della metà, e del quadrato di quella linea, che è fra i segamenti, lo che bisognava dimostrare.

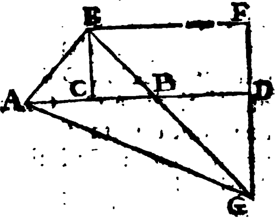
TEOREMA X.

PROPOSIZIONE X.

Se una linea retta sia segata per mezzo, e vi si aggiunga un'altra linea per diritto, i due quadrati, che si fanno da tutta la linea colla giunta, e dalla giunta,

ta,

ta, sono doppi del quadrato della metà, e del quadrato, che si fa dalla metà, e dalla giunta, siccome da una sola linea.



Sia la linea retta A B segata per mezzo nel punto C, ed aggiungasi ad essa per diritto la linea B D. Dico, che i quadrati di A D, D B sono doppj de' quadrati di A C, C D. Tirisi dal punto C la C E ad angoli retti sopra la A B, e pongasi uguale a ciascuna di esse A C, C B; e giungasi A E, E B. Poi per E tirisi la E F paralella alla A D, e per D tirisi la D F paralella alla C E; e perchè nelle paralelle E C, F D cade la linea retta E F, sono gli angoli C E F, E F D uguali a due retti; gli angoli dunque F E B, E F D sono minori di due retti, ma le linee rette prolungate in infinito dagli angoli minori di due retti concorrono insie-

11. del prim.

29. del prim.

fieme, adunque prolungandosi le EB, FD concorreranno dalle parti di BD. Prolunghinsi, e concorrano nel punto G, e giungasi AG. Perchè dunque la AC è uguale alla CE, eziandío l'angolo AEC sarà uguale all'angolo EAC, e l'angolo C è retto, onde l'uno, e l'altro di essi EAC, AEC, sarà la metà d'un retto; e per la medesima ragione sarà la metà d'un retto l'uno, e l'altro di essi CEB, EBC, adunque AEB è retto; e perchè EBC è la metà d'un retto, sarà anche la metà d'un retto DBG, essendo alla cima, ovvero contrapposto. Ma BDG altresì è retto, per essere uguale all'alterno DCE, il rimanente dunque DGB è la metà d'un retto, e però è uguale a DBG; onde il lato BD è uguale al lato DG. Similmente, perchè EGF è la metà d'un retto, ed è retto l'angolo F, essendo uguale all'angolo opposto C, sarà il rimanente FEG la metà d'un retto, ed uguale ad EGF, onde eziandío il lato GF è uguale al lato EF, essendo dunque la EC uguale alla CA, il quadrato di EC sarà uguale al quadrato di CA, e però i quadrati di EC, CA sono

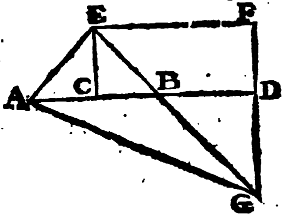
15. del prim.

29. del prim.

6. del prim.

dop-

doppj del quadrato di CA, ma a i quadrati di EC, CA è uguale il quadrato di EA, il quadrato dunque di EA è doppio del quadrato di AC. E perchè la GF è uguale alla FE, eziandío al quadrato di GF sarà uguale il quadrato di FE, adunque i quadrati di GF, FE sono doppj del quadrato di EF; ma a i quadrati di GF, FE è uguale il quadrato di EG, e per tal cagione il quadrato di EG è doppio del quadrato di EF, ed è la



EF uguale alla CD, il quadrato dunque di EG è doppio del quadrato di CD; ma il quadrato di EA si è dimostrato doppio del quadrato di AC, onde i quadrati di AE, EG sono doppj de' quadrati di AC, CD, ed a' quadrati di AE, EG è uguale il quadrato di AG, il quadrato dunque di AG è doppio de i quadrati di AC, CD; ma al quadrato di AG sono uguali i quadrati di AD, DG, per la qual cosa i quadrati di AD, DG sono doppj de i quadrati di AC,

CD;

CD; ma la DG è uguale alla DB, i quadrati dunque di AD, DB sono doppj de i quadrati di AC, CD; laonde, se una linea retta sia segata per mezzo, e vi si aggiunga un' altra linea per diritto, i due quadrati, che si fanno da tutta la linea colla giunta, e dalla giunta, sono doppj del quadrato della metà, e del quadrato, che si fa dalla metà, e dalla giunta, siccome da una sola linea, lo che bisognava dimostrare.

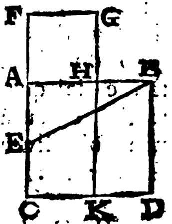
PROBLEMA I.

PROPOSIZIONE XI.

Segare una linea retta data talmente, che il rettangolo contenuto da tutta linea, e da una delle parti sia uguale al quadrato dell' altra parte.

Sia la retta linea data AB, bisogna segarla in tal modo, che il rettangolo contenuto da tutta la linea, e da una parte sia uguale al quadrato dell' altra parte. Descrivasi

46. del prim. vasi dalla AB il quadrato ABDC, e seghisi AC per mezzo nel punto
10. del prim. E; e giungasi BE. Poi prolungata CA in F pongasi EF uguale a BE, e dalla AF descrivasi il quadrato FGHA, e GH prolunghisi
46. del prim. in K. Dico, che la AB è segata in H talmente, che il rettangolo ABH è uguale al quadrato di AH. Perciocchè essendo la linea AC segata per mezzo in E, e vi si aggiunge AF per diritto, il rettangolo CFA



6. di quest. insieme col quadrato di AE sarà uguale al quadrato di EF, ma EF è uguale alla EB, il rettangolo dunque CFA insieme col qua-
47. del prim. drato di AE è uguale al quadrato di EB; ed al quadrato di EB sono uguali i quadrati di BA, AE; conciossiacosachè l'angolo A sia retto, onde il rettangolo CFA insieme col quadrato di AE è uguale a i quadrati di BA, AE, traggasi il comune quadrato di AE, adunque il rimanente rettangolo CFA è uguale al quadrato di AB; ma CFA è il rettangolo FK, perciocchè la AF è uguale alla FG, ed il quadrato di

AB

AB è AD, onde il rettangolo FK è uguale al quadrato AD. Traggasi AK comune, il rimanente adunque FH è uguale al rimanente HD, ed è HD il rettangolo ABH, essendo la AB uguale alla BD, ed FH è il quadrato di AH, laonde il rettangolo ABH è uguale al quadrato di AH, e però la data retta linea AB è segata in H, talmentechè il rettangolo ABH è uguale al quadrato di AH, lo che bisognava fare.

TEOREMA XI.

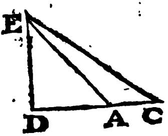
PROPOSIZIONE XII.

Ne' triangoli ottusiangoli il quadrato, che si fa dal lato sottoposto all' angolo ottuso, è tanto maggiore degli quadrati fatti da' lati, che l'angolo ottuso comprendono, quanto è il rettangolo contenuto due volte da un de' lati, che sono d'intorno all' angolo ottu-

tu-

tuſo, cioè da quello nel quale prolungato cade la perpendicolare, e dalla linea preſa di fuori della perpendicolare verſo l'angolo ottuſo.

Sia il triangolo ottuſiangolo A E C, che abbia l'angolo ottuſo E A C, e dal punto E tiriſi



12. del prim. alla C A prolungata la perpendicolare E D. Dico, che il quadrato di C E è tanto maggiore de i quadrati di E A, A C, quanto il rettangolo, che due volte dalle C A, A D è contenuto. Perciocchè eſſendo la linea C D ſegata in qualunque modo nel punto

4. di queſ. A, ſarà il quadrato di C D uguale a i quadrati di C A, A D, ed al rettangolo, che due volte è contenuto dalle C A, A D. Pongaſi comune il quadrato di D E, adunque i quadrati di C D, D E ſono uguali a i quadrati di C A, A D, D E, ed al rettangolo, che due volte è contenuto dalle C A, A D; ma a i quadrati di C D, D E è uguale il

qua-

quadrato di CE, perciocchè l'angolo D è retto, essendo la ED perpendicolare, ed a i quadrati di AD, DE è uguale il quadrato di AE, onde il quadrato di CE è uguale a i quadrati di CA, AE, ed al rettangolo, che due volte dalle CA, AD è contenuto; il quadrato dunque di CE è tanto maggiore de i quadrati di CA, AE, quanto è il rettangolo, che due volte è contenuto dalle CA, AD; laonde ne' triangoli ottusiangoli il quadrato, che si fa dal lato sottoposto all'angolo ottuso, è tanto maggiore de i due quadrati fatti da i lati, che comprendono l'angolo ottuso, quanto è il rettangolo contenuto due volte da uno de' lati, che sono d'intorno all'angolo ottuso, cioè da quello, nel quale prolungato cade la perpendicolare, e dalla linea presa di fuori della perpendicolare verso l'angolo ottuso, lo che bisognava dimostrare.

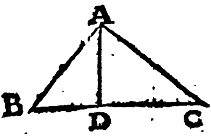
TEOREMA XII.

PROPOSIZIONE XIII.

Ne' triangoli acuziangoli, il quadrato, che si fa

dal

dal lato ſottopoſto all' angolo acuto, è tanto minore de i quadrati fatti da i lati, che l' angolo acuto comprendono, quanto è il rettangolo contenuto due volte da uno de' lati, che ſono d' intorno all' angolo acuto, cioè da quello, nel quale cade la perpendicolare, e dalla linea preſa di dentro dalla perpendicolare verſo l' angolo acuto.



Sia il triangolo acuziangolo A B C, che abbia l' angolo B acuto, e dal punto A alla BC tiriſi la perpendicolare A D.

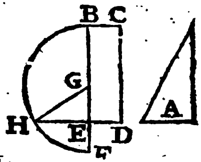
12. del prim.

Dico, che il quadrato di A C è tanto minore de' quadrati di C B, B A, quanto è il rettangolo contenuto due volte dalle C B, B D. Perchè eſſendo la linea retta C B ſegata in qualunque modo nel punto D, ſaranranno i quadrati di CB, BD uguali al rettangolo, che due volte si contiene dalle CB, BD, ed al quadrato di DC, pongasi il quadrato di AD comune, i quadrati dunque di CB, BD, DA sono uguali al rettangolo, che due volte dalle CB, BD si contiene, ed a i quadrati di AD, DC, ma a i quadrati di BD, DA è uguale il quadrato di AB, perciocchè l'angolo D è retto, ed a i quadrati di AD, DC è uguale il quadrato di AC, onde i quadrati di CB, BA sono uguali al quadrato di AC, ed al rettangolo due volte contenuto dalle CB, BD, e per tal cagione il quadrato di AC è tanto minore de i quadrati di CB, BA, quanto è il rettangolo contenuto due volte dalle CB, BD, adunque ne' triangoli acutiangoli il quadrato, che si fa dal lato sottoposto all'angolo acuto, è tanto minore de i quadrati fatti da' lati, che l'angolo acuto comprendono, quanto è il rettangolo contenuto due volte da uno de' lati, che sono dintorno all'angolo acuto, cioè da quello, nel quale cade la perpendicolare, e dalla linea presa di dentro dalla perpendicolare verso l'angolo acuto, lo che bisognava dimostrare. 7. di ques.

PROBLEMA II.

PROPOSIZIONE XIV.

Coſtituire un quadrato uguale ad un dato rettilineo.



Sia il dato rettilineo A, biſogna coſtituire un quadrato uguale al rettilineo A. Coſtituiſcaſi il paralellogrammo rettangolo BCDE u-
45. del guale al rettilineo A. Se dunque
prim. BE è uguale ad ED, ſarà fatto quello, ché ſi proponeva, percioccchè al rettilineo A ſi ſarà coſtituito il quadrato BD uguale; ma, ſe BE non è uguale ad ED, una di eſſe ſarà maggiore. Sia maggiore BE, e prolunghiſi in F, e pongaſi EF uguale ad ED, poi diviſa FB per mezzo nel punto G, dal centro G coll' intervallō di una di eſſe GB, GF deſcrivaſi il mezzo cerchio BHF, e prolunghiſi DE in H; e giungaſi GH; perchè dunque la linea retta BF è diviſa in parti

ti uguali nel punto G, ed in parti disuguali nell'E, sarà il rettangolo B E F insieme col quadrato di E G uguale al quadrato di G F, e G F è uguale a G H, onde il rettangolo B E F insieme col quadrato di G E è uguale al quadrato di G H; ma al quadrato di G H sono uguali i quadrati di H E, E G, il rettangolo dunque B E F insieme col quadrato di E G è uguale a i quadrati di H E, E G. Traggasi il quadrato di E G comune; adunque il rettangolo rimanente B E F è uguale al quadrato di E H, ma il rettangolo B E F è esso paralellogrammo B D, perciocchè E F è uguale ad E D, il paralellogrammo dunque B D è uguale al quadrato di E H, ma è uguale eziandío al rettilineo A, e però il rettilineo A sarà uguale al quadrato di E H, laonde al rettilineo A si è costituito un quadrato uguale, cioè quello, che si descrive da E H, lo che bisognava fare.

5. di quesſ.

47. del prim.

Fine del Secondo Libro.

DEGLI ELEMENTI D' EUCLIDE TRADOTTI IN VOLGARE

LIBRO TERZO.

DEFINIZIONI.

I.

I Cerchi uguali sono quelli, che hanno i diametri, ovvero i semidiametri loro uguali.

II.

La linea retta si dice toccare il cerchio, la quale toccandolo, e prolungata non lo sega.

III.

I cerchi si dicono toccarsi fra loro, quali toccandosi non si segano.

IV.

Le linee rette nel cerchio si dicono essere ugualmente distanti dal centro, quando le perpendicolari tirate dal centro sopra quelle sono uguali.

V.

E quella linea, si dice essere più distante dal centro, sopra la quale cade la perpendicolare maggiore.

VI.

La porzione del cerchio, è una figura contenuta dalla linea retta, e dalla circonferenza.

VII.

L'angolo della porzione è quello, che si comprende dalla linea retta, e dalla circonferenza del cerchio.

L'an-

VIII.

L'angolo nella porzione è quello, che si contiene da due linee rette tirate da un punto della circonferenza a i termini della linea, che è base di detta porzione.

IX.

Ma quando le linee rette, che contengono l'angolo, pigliano una parte della circonferenza, sopra quella si dice fermarsi l'angolo.

X.

Il settore del cerchio è una figura contenuta dalle linee rette, che partitesi dal centro fanno un angolo, e dalla circonferenza presa da esse.

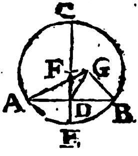
XI.

Le porzioni simili de' cerchi sono quelle, che pigliano angoli uguali, ovvero sopra le quali si fermano angoli uguali.

PROBLEMA I.

PROPOSIZIONE I.

Trovare il centro d'un dato cerchio.



Sia il dato cerchio
A B C, bisogna di esso trovare il centro.
Tirisi in esso una linea
16. del retta A B, comunque
prim. si voglia, e seghisi per
mezzo nel punto D, poi dal pun-
11. del to D tirata la D C ad angoli retti
prim. sopra la A B, prolunghisi fino al-
l'E, e seghisi la C E per mezzo nel
2. Post. punto F. Dico il punto F essere
centro del cerchio A B C. Perciocchè, se non è F, sia, s'egli è possibile, un altro punto G, e giungasi
G A, G D, G B, perchè dunque
Diff 15. A D è uguale alla D B, ed è co-
del prim. mune la D G, saranno le due A D,
8. del D G uguali alle due B D, D G,
prim. l'una all'altra, e la base G A è
ugua-

uguale alla base G B, partendosi dal centro G, l' angolo dunque A D G è uguale all' angolo G D B, ma quando la linea retta stando sopra un' altra linea retta fa gli angoli da i lati fra loro uguali, sono amendue retti, e perciò l' angolo G D B è retto, ma è retto ancora F D B, adunque l' angolo F D B è uguale all' angolo G D B, il maggiore al minore, che è impossibile, onde il G non è centro del cerchio A B C. Dimostreremo parimente non essere altro punto fuori, che F, adunque F è centro del cerchio A B C, lo che bisognava fare. Diff. 10. del prim.

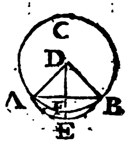
COROLLARIO.

Da questo si comprende chiaramente, che, se nel cerchio una linea retta sega un' altra linea retta per mezzo, e ad angoli retti, il centro del cerchio è nella linea, che sega.

TEOREMA I.

PROPOSIZIONE II.

Se nella circonferenza del cerchio si piglino due punti, comunque si voglia, la linea retta, che gli congiunge, caderà dentro al cerchio.



Sia il cerchio ABC, e nella circonferenza di esso piglisi due punti, quali si siano A, B. Dico, che la linea retta tirata dal punto A al B cade dentro al cerchio; perciocchè, s' egli è possibile, cada di fuori, come AEB, e preso il centro del cerchio ABC, qual sia D, giungasi DA, DB, e prolunghisi DF in E, essendo dunque la DA uguale alla DB, sarà ancor l' angolo DAE uguale all' angolo DBE, e perchè si prolunga un lato del triangolo DAE, cioè AEB, sarà l' angolo DEB maggiore dell' angolo DAE, ma l' angolo DAE è uguale all' angolo DBE, on-

Per l' ant.

5. del prim.

16. del prim.

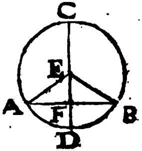
onde l'angolo DEB è maggiore dell' angolo DBE, ed all' angolo maggiore è sottoposto il maggior lato, adunque la DB è maggiore della DE: e la DB è uguale alla DF, e perciò la DF è maggiore della DE, la minore della maggiore, lo che è impossibile, onde la linea retta tirata dal punto A al B non caderà fuori del cerchio. Dimostreremo parimente, che nè anche cade in essa circonferenza, onde è necessario, che cada di dentro; se dunque nella circonferenza del cerchio si piglino due punti comunque si voglia, la linea retta, che gli congiunge caderà dentro al cerchio, lo che bisognava dimostrare.

18. *del prim.*

TEOREMA II.

PROPOSIZIONE III.

Se una linea retta, tirata nel cerchio per lo centro, seghi per mezzo una linea retta non tirata per lo centro, la segherà ad angoli retti; e segandola ad angoli retti, la segherà per mezzo.



Sia il cerchio ABC, e la linea retta tirata in esso per lo centro CD seghi per mezzo la retta AB non tirata per lo centro nel punto F. Dico, che la sega ad angoli retti, piglisi il centro del cer-
1. di ques. chio ABC, che sia E, e giungasi EA, EB, perchè dunque la AF è uguale alla FB, e la FE è comune, saranno le due AF, FE uguali alle due FB, FE, e la base EA è uguale alla base EB, l'angolo dunque AFE
8. del prim. sarà uguale all'angolo BFE, ma quando una linea retta stando sopra un'al-
Diff. 10. del prim. tra retta fa gli angoli da i lati fra loro uguali, sono amendue retti, onde l'uno, e l'altro AFE, BFE è retto, e perciò la linea retta CD, che tirata per lo centro sega per mezzo la retta AB non tirata per lo centro, la segherà ancor ad angoli retti. Ma la CD seghi la AB ad angoli retti, dico, che eziandío la sega per mezzo, cioè, che la AF
Diff. 15. del prim. è uguale alla FB, avendo fatte le medesime cose, perchè la EA semidiametro del cerchio è uguale alla EB, sarà ancor l'angolo EAF uguale
8. del prim. all'angolo EBF, e l'angolo AFE
4. Post. retto è uguale al retto BFE, adunque

que i due triangoli EAF, EBF hanno due angoli uguali a due angoli, ed un lato uguale ad un lato EF, cioè comune all' uno, e l' altro, che è sottoposto ad uno degli angoli uguali, e perciò averanno gli altri lati uguali agli altri lati, e la AF sarà uguale alla FB, adunque, se una linea retta tirata nel cerchio per lo centro seghi per mezzo una linea retta non tirata per lo centro, la segherà ancor ad angoli retti, e segandola ad angoli retti, la segherà ancor per mezzo, lo che bisognava dimostrare. *26 del prim.*

TEOREMA III.

PROPOSIZIONE IV.

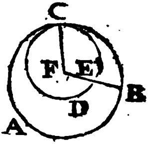
Se due linee rette nel cerchio non tirate per lo centro si seghino fra loro, non si segheranno mai per mezzo.

Sia il cerchio ABCD, e seghinsi in esso due linee rette non tirate per lo centro AC, BD. Dico, che non si segano per mezzo, per-

TEOREMA V.

PROPOSIZIONE VI.

Se due cerchi si tocchino fra loro di dentro; non averanno il medesimo centro.



Due cerchi ABC, CDE tocchinsi di dentro nel punto C. Dico, che essi non hanno il medesimo centro. Sia F, se esser può, e giungasi FC, e tirisi FEB in qualunque modo; perchè dunque F è centro del cerchio ABC, la CF sarà uguale alla FB, oltre a questo essendo F centro del cerchio CDE la CF sarà uguale alla FE; ma si è dimostrata la CF uguale alla FB, adunque la FE è uguale alla FB, la minore alla maggiore, che non può essere, laonde il punto E non è centro de i cerchi ABC, CDE. Se dunque due cerchi si tocchino fra loro di dentro, non averanno il medesimo centro, lo che bisognava dimostrare.

TEO-

TEOREMA VII.

PROPOSIZIONE VII.

Se nel diametro del cerchio si pigli qualche punto, che non sia centro del cerchio, e da esso cadano nel cerchio alcune linee rette, la maggiore di tutte sarà quella, nella quale è il centro, e la minore sarà la rimanente, e delle altre la più vicina a quella, che passa per lo centro sempre è maggiore della più lontana, e solamente due uguali caderanno dal medesimo punto nel cerchio dall'una, e l'altra parte della minore.

Sia il cerchio ABCD, il cui diametro AD: ed in essa AD pigli si un punto F, che non sia cen-

centro, e sia il centro del cerchio E: e dal punto F cadano alcune linee rette nel cerchio ABCD, e siano FB, FC, FG. Dico la FA esser maggiore di tutte, e la FD minore: e delle altre, la FB maggiore della FC, e la FC maggiore della FG, congiungasi BE, CE, GE; e perchè

20. del prim. due lati di ciascun triangolo sono maggiori del rimanente, saranno le BE, EF maggiori della BF; ma la AE è uguale alla EB, adunque le BE, EF sono uguali alla AF, e perciò la AF è maggiore della FB; oltre a ciò, perchè la BE è uguale alla EC, e la FE comune, saranno le due BE, EF uguali alle due
24. del prim. CE, EF, ma l'angolo BEF è maggiore dell'angolo CEF, adunque la base BF è maggiore della base FC, per la medesima ragione ancor la CF è maggiore della FG, e perchè le GF, FE sono maggiori della EG, e la GE è uguale alla ED, saranno le GF, FE maggiori della ED, traggasi la comune EF, adunque la rimanente GF è maggiore della rimanente FD, onde la maggiore di tutte è FA, e la mino-

nore FD, e la BF è maggiore della FC, e la CE maggiore della FG. Dico, che dal punto F cadono due linee rette uguali solamente nel cerchio ABCD dall'una, e l'altra parte della minore FD, costituiscasi nella linea EF, e nel punto dato in essa E l'angolo FEH uguale all'angolo GEF, e congiungasi FH, perchè dunque la GE è uguale alla EH, e la EF è comune, le due GE, EF sono uguali alle due HE, EF; e l'angolo GEF uguale all'angolo HEF, onde la base FG sarà uguale alla base FH. Dico, che dalla F nel cerchio non cade altra linea uguale alla FG, cada, se esser può, FK, ed essendo la FK uguale alla FG, e la FH uguale alla FG, sarà eziandío la FK uguale alla FH, cioè la più vicina a quella, che passa per lo centro, alla più lontana, il che non può essere, laonde dal punto F non caderà altra linea retta nel cerchio uguale alla GF, fuorchè una sola; se dunque si pigli nel diametro del cerchio qualche punto, che non sia centro del cerchio, ec. lo che bisognava dimostrare.

32. del prim.

4. del prim.

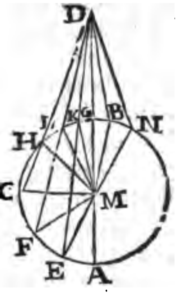
TEO-

TEOREMA VII.

PROPOSIZIONE VIII.

Se fuori del cerchio si pigli qualche punto, e da quello si tirino linee rette al cerchio, una delle quali passi per lo centro, e l'altre in qualsivoglia modo, di quelle, che cadono sopra la circonferenza concava, la maggiore di tutte sarà quella, che passa per lo centro, e dell'altre la più vicina a quella, che passa per lo centro sarà sempre maggiore della più lontana: ma di quelle, che cadono sopra la circonferenza curva, la minore sarà quella, che è fra il punto preso, ed il diamemetro, e delle altre la più vicina alla minore sarà minore della più lontana: e due sole uguali cadono dal punto nel cerchio dall'una, e l'altra parte della minore.

Sia il cerchio ABC, e piglisi fuori del cerchio un punto D, e da quello tirinsi nel cerchio alcune linee rette DA, DE, DF, DC, e sia la DA per lo centro. Dico, che di quelle, che cadono nella circonferenza concava AEFC la DA, che passa per lo centro, è maggiore di tutte, e minore quella, che è posta fra il punto D, ed il diametro AG, cioè la DG: e la DE è maggiore della DF, e la DF maggiore della DC, e di quelle, che cadono nella circonferenza curva HLKG, la più vicina alla minore di tutte DG è sempre



mi-

minore della più lontana, cioè la DK minore della DL, e la DL
1. del terzo. minore della DH; perciocchè piglisi il centro del cerchio ABC, che sia M, e congiungasi ME, MF, MC, MK, MH, ML, e perchè
Diff. 15. del prim. la AM è uguale alla ME, pongasi comune la MD, adunque la AD è uguale alla EM, MD, ma le EM, MD sono maggiori della ED;
20. del prim. adunque eziandío la AD è maggiore della ED; oltre a ciò, per-
Diff. 15. del prim. chè la ME è uguale alla MF, pongasi comune la MD, saranno le EM, MD uguali alle MF, MD, e l'angolo EMD è maggiore del-
24. del prim. l'angolo FMD, onde la base ED sarà maggiore della base FD. Dimostreremo similmente la FD essere maggiore della CD, adunque la maggiore di tutte è la DA, e la DE è maggiore della DF, e la DF maggiore della DC. Poi essendo le MK, KD maggiori della MD,
20. del prim. e la MG uguale alla MK, sarà la rimanente KD maggiore della rimanente GD, laonde la GD è minore della DK, e perciò la GD è minore di tutte, e perchè in un lato del triangolo MLD, cioè in
21. del prim. MD si costituiscono dentro due linee rette MK, KD, saranno le

MR,

MK, KD minori delle ML, LD, delle quali la MK è uguale alla ML, la rimanente dunque DK è minore della rimanente DL. Dimostreremo parimente la DL esser minore della DH, e perciò la DG è minore di tutte, e la DK minore della DL, e la DL minore della DH. Dico eziandío, che due sole uguali cadono dal punto D nel cerchio dall'una, e l'altra parte della minore. Costituiscasi nella linea retta MD, e nel dato punto in essa M l'angolo DMB uguale all'angolo KMD, e congiungasi DB. Perchè dunque la MK è uguale alla MB, e la MD comune, le due KM, MD sono uguali alle due BM, MD, l'una all'altra, e l'angolo KMD uguale all'angolo BMD, onde la base DK è uguale alla base DB. Dico, che dal punto D niun'altra cade nel cerchio uguale alla DB; cada, se esser può, la DN, e perchè la DK è uguale alla DN, ed è uguale alla DB, sarà la DB uguale alla

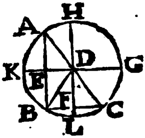
DN,

DN, cioè la più vicina alla minore di tutte uguale alla più lontana, che si è dimostrato impossibile, laonde dal punto D non caderanno nel cerchio ABC più di due linee rette uguali dall'una, e l'altra parte della minore GD. Se dunque fuori del cerchio si pigli qualche punto, ec. lo che bisognava dimostrare.

TEOREMA VIII.

PROPOSIZIONE IX.

Se dentro al cerchio si pigli qualche punto, e da quello sopra il cerchio cadano più di due linee rette uguali, il punto preso sarà centro del cerchio.



Sia il cerchio ABC, e piglisi dentro di esso il punto D, dal quale cadano nel cerchio più di due linee rette uguali, come DA, DB, DC. Dico, che il punto D è centro del cerchio ABC.

Giun-

Giungasi AB, BC, e seghinsi per mezzo ne' punti E, F, e congiunte le ED, DF prolunghinsi ne' punti GK, HL. Perchè dunque la AE è uguale alla EB, e la ED comune, saranno le due AE, ED uguali alle due BE, ED, e la base DA è uguale alla base DB, onde l'angolo AED sarà uguale all'angolo BED, e perciò amendue gli angoli AED, BED sono retti, e la GK segando per mezzo la AB, la sega ancor ad angoli retti, e perchè, se nel cerchio una linea retta sega per mezzo un'altra linea retta, e ad angoli retti, il centro del cerchio è nella linea, che sega, sarà nella GK il centro del cerchio ABC, e per la medesima ragione il centro del cerchio ABC è nella HL, e le linee rette GK, HL, non hanno cosa alcuna comune fuor che 'l punto D, adunque D è centro del cerchio ABC; laonde, se dentro al cerchio si pigli qualche punto, e da quello sopra il cerchio cadano più di due linee rette uguali, il punto preso sarà centro del cerchio.

10. del prim.

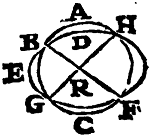
8. del prim.

Coroll. del pr. di quest.

TEOREMA IX.

PROPOSIZIONE X.

Un cerchio non sega un altro cerchio in più di due punti.

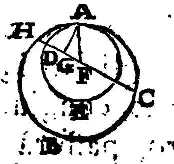


Il cerchio ABC seghi il cerchio DEF in più di due punti, cioè in B, G, F, H,
1. di ques. e piglisi il centro del cerchio ABC, che sia R, e congiungasi RB, RG, RF, e perchè dentro al cerchio DEF si è preso un punto R, dal quale cadono nel cerchio più di due
9. di ques. linee rette uguali RB, RF, RG, il punto R sarà centro del cerchio DEF. Ma la R è centro del cerchio ABC, sarà dunque il medesimo R centro di due cerchi, che si segano, lo che non può essere, laonde un cerchio non sega un altro cerchio in più di due punti, lo che bisognava dimostrare.

TEOREMA X.

PROPOSIZIONE XI.

Se due cerchi si tocchino di dentro, e si piglino i lor centri, la linea retta, che congiunge i centri, prolungata caderà nel toccamento.



Tocchinsi di denro due cerchi ABC, ADE nel punto A, e piglisi il centro del cerchio ABC, che sia F, ed il centro del cerchio ADE, che sia G. Dico, che la linea retta tirata dal punto F al G prolungandosi cade nel punto A. Cada, se sia possibile, come la FGDH, e congiungansi AF, AG; e perchè le AG, GF sono maggiori della FA, cioè della FH, traggasi la comune FG, adunque la rimanente AG è maggiore della GH, ma la AG è uguale alla GD, onde la GD è maggiore della GH, la minore della

1. di quest. 20. del prim.

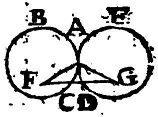
G 2 mag-

maggiore, che è impossibile, onde non caderà una linea retta tirata dal punto F al G fuori del toccamento A, e perciò è necessario, che cada in esso; adunque, se due cerchi si tocchino di dentro, e si piglino i loro centri, la linea retta, che congiunge i centri, prolungata caderà nel toccamento, lo che bisognava dimostrare.

TEOREMA XI.

PROPOSIZIONE XII.

Se due cerchi si tocchino di fuori, la linea retta, che congiunge i centri loro passerà per lo toccamento.



Due cerchi ABC, ADE tocchinsi di fuori nel punto A: e piglisi il centro del cerchio ABC, che sia F, ed il centro del cerchio ADE, cioè G. Dico, che la linea retta tirata dal punto F al G passa per lo toccamento. Non già, ma se è possibile, cada come FCDG: e

1. di ques.

giun-

giungansi FA, AG, perchè dunque F è centro del cerchio ABC, farà la AF uguale alla FC, e perchè G è centro del cerchio ADB, la AG farà uguale alla GD, e si è dimostrata la AF uguale alla FC, adunque le FA, AG sono uguali alle FC, DG, e tutta la FG è maggiore delle FA, AG; ma è minore, che è impossibile, onde non è vero, che una linea retta tirata dal punto F al G non passi per lo toccamento A, e perciò è necessario, che vi passi; adunque, se due cerchi si tocchino di fuori, la linea retta, che congiunge i centri loro passerà per lo toccamento, lo che bisognava dimostrare.

20. del prim.

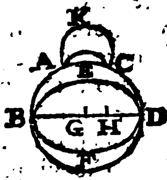
TEOREMA XII.

PROPOSIZIONE XIII.

Il cerchio non tocca un altro cerchio in più di un punto, o lo tocchi di dentro, o di fuori.

Il cerchio ABDC, se è possibile, tocchi il cerchio EBFD prima di dentro in più di un punto, cioè

1. di ques. in B, D: e piglisi il centro del
cerchio ABDC, che sia G, ed il
11. di ques. centro del cerchio EBFD, cioè H,
adunque la linea retta tirata dal
punto G all'H caderà ne' punti B,
D; cada come BGHD, e perchè G
è centro del cerchio ABDC, sa-
15. del prim. rà la BG uguale al-
la GD, adunque la
BG è maggiore del-
la HD, e la BH
molto maggiore del-
la HD, oltre a
questo, perchè H è
centro del cerchio
EBFD, sarà la BH uguale alla
HD; ma si è dimostrata molto mag-
giore, che è impossibile, adunque
il cerchio non tocca di dentro un
altro cerchio in più di un punto.
Dico, che nè anche di fuori lo toc-
ca; perciocchè, se è possibile, il
cerchio ACK tocchi di fuori il cer-
chio ABDC in più di un punto,
cioè in A, C, e giungasi AC.
Perchè dunque nella circonferenza
dell'uno, e l'altro cerchio ABDC,
ACK si sono presi due punti, qua-
2. di ques. li si vogliono A, C, la linea retta,
che gli congiunge, caderà dentro al-
l'uno, e l'altro, ma cade dentro
al cerchio ABDC, e fuori del cer-
chio



chio ACK, che è inconveniente, adunque il cerchio non tocca un altro cerchio di fuori in più di un punto, e si è dimostrato, che nè anche di dentro lo tocca, onde il cerchio non tocca un altro cerchio in più di un punto, o lo tocchi di dentro, o di fuori, lo che bisognava dimostrare.

TEOREMA XIII.

PROPOSIZIONE XIV.

Nel cerchio le linee rette uguali sono ugualmente distanti dal centro, e quelle, che sono ugualmente distanti dal centro, sono fra loro uguali.

Sia il cerchio ABDC, ed in esso linee rette uguali AB, CD. Dico, che elle sono ugualmente distanti dal centro. Piglisi il centro del cerchio ABCD, che sia E, e da esso tirinsi EF, EG, perpendicolari alle AB, CD, e giunganſi le AE, EC, 1. di queſ.

3. di ques. EC, e perchè una linea retta EF tirata per lo centro sega la linea retta AB non tirata per lo centro ad angoli retti, la segherà ancora per mezzo, onde la AF è uguale alla FB, e la AB è doppia della AF, e per la medesima ragione la CD è doppia della CG, e la AB è uguale alla CD, adunque la AF è uguale alla CG, ed essendo la AE uguale alla EC, il quadrato della AE sarà uguale al quadrato
47. del prim. della EC; ma i quadrati della AF, FE sono uguali al quadrato della AE, perchè l'angolo F è retto; ed i quadrati delle EG, GC sono uguali al quadrato di EC, essendo l'angolo G retto, adunque i quadrati di AF, FE sono uguali a i quadrati di CG, GE, de' quali il quadrato della AF è uguale al quadrato della CG, perciocchè la AF è uguale alla CG; adunque il rimanente quadrato, che si fa dalla FE, è uguale al rimanente fatto della EG, e però la FE è uguale
Di 4. ques. alla EG; ma nel cerchio si dicono le linee rette essere ugualmente distanti dal centro, quando le perpendicolari tirate dal centro sopra quelle sono uguali, adunque le AB, CD sono ugualmente distanti

dal

dal centro. Ma le AB, CD siano ugualmente distanti dal centro, cioè sia la FE uguale alla EG. Dico, che la AB è uguale alla CD. Avendo fatte le medesime cose, dimostreremo eziandio, che la AB è doppia della AF, e la CD doppia della CG, e perchè la AE è uguale alla EC, sarà ancora il quadrato della AE uguale al quadrato della EC; ma i quadrati delle EF, FA sono uguali al quadrato della AE, ed i quadrati delle EG, GC uguali al quadrato della EC; adunque i quadrati delle EF, FA sono uguali a i quadrati di EG, GC, de' quali il quadrato della EG è uguale al quadrato della EF, perchè la EG è uguale alla EF, adunque il rimanente quadrato della AF è uguale al rimanente quadrato della CG, e però la AF è uguale alla CG, ed è la AB doppia della AF, e la CD doppia della CG, onde la AB sarà uguale alla CD; adunque nel cerchio le linee rette uguali sono ugualmente distanti dal centro, e quelle, che sono ugualmente distanti dal centro, sono fra loro uguali; lo che bisognava dimostrare.

47. del prim.

TEOREMA XIV.

PROPOSIZIONE XV.

Nel cerchio la maggiore di tutte è il diametro, e dell'altre sempre la più vicina a quella, che passa per lo centro, è maggiore della più lontana.

Sia il cerchio ABCD, il cui diametro AD, ed il centro E, e la più vicina al diametro AD sia la BC, e la più lontana FG. Dico, che la AD è maggiore di tutte, e la BC è maggiore della FG. Tirinsi dal centro le EH, EK perpendicolari alle BC, e FG, e perchè la BC è più vicina a quella, che passa per lo centro, e la FG più lontana, sarà la EK maggiore della EH. Pongasi la EL uguale alla EH, e per L tirata la LM ad angoli retti sopra la EK prolunghisi in N, e giungansi EM, EN, EF, EG, e perchè la EH è uguale alla

12 del prim.

Diff. 5. di quest.

la

la EL; sarà la BC uguale alla MN, e perchè la AE è uguale ad EM, e la DE alla EN, sarà la AD uguale alle ME, EN, ma le ME, EN sono maggiori della MN, adunque la AD è maggiore della MN; ed è la MN uguale alla BC, onde la AD è maggiore della BC, ed essendo le due EM, EN uguali alle due FE, EG, e l'angolo MEN maggiore dell'angolo FEG, sarà la base MN maggiore della base FG, ma si è dimostrata la MN uguale alla BC, e però la BC è maggiore della FG; adunque la maggiore di tutte è il diametro AD, e la BC è maggiore della FG, onde nel cerchio la maggiore di tutte è il diametro, e dell'altre sempre la più vicina a quella, che passa per lo centro, è maggiore della più lontana, lo che bisognava dimostrare.

Per l'ant.

20. del prim.

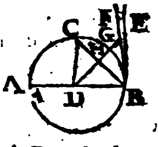
Diff. 15. del prim.

24. del prim.

TEOREMA XV.

PROPOSIZIONE XVI.

Quella linea, che dalla estremità del diametro è tirata ad angoli retti, cade fuori del cerchio, e nel luogo, che è fra la linea retta, e la circonferenza, non cade alcun'altra linea, e l'angolo del mezzo cerchio è maggiore d'ogni angolo acuto rettilineo, ed il rimanente è minore.



Sia il cerchio ABC intorno al centro D, ed al diametro A B. Dico, che la linea retta tirata dal punto B ad angoli retti sopra la A B cade fuori del cerchio. Non già; ma se è possibile, cada di dentro, come la BC, e giungasi DC; perchè dunque la DB è uguale alla DC, sarà ancor l'angolo DBC uguale all'angolo BCD, e DBC è retto, onde similmente BCD è retto; e perciò gli angoli DBC, BCD sono uguali a due retti, lo che è impossibile; adunque la linea retta tirata dal punto B ad angoli retti sopra la A B non caderà dentro al cerchio. Dimostreremo parimente, che nè anche caderà in essa circonferenza: e però è necessaria

5. del prim.

17. del prim.

cessaria, che cada di fuori; cada come la BE. Dico, che nel luogo, che è fra la linea retta BE, e la circonferenza CHB non cade altra linea retta. Perciocchè cada, se sia possibile, come la FB, e dal punto D tirisi la DG perpendicolare alla FB, e perchè l'angolo BGD è retto, e DBG è minore del retto, sarà la BD maggiore della DG; ma la DB è uguale alla DH, adunque la DH è maggiore della DG, la minore della maggiore; che è impossibile, onde nel luogo, che è fra la linea retta, e la circonferenza, non caderà altra linea retta. Dico oltre a ciò, che l'angolo del mezzo cerchio contenuto dalla linea retta BA, e dalla circonferenza CHB è maggiore di ogni angolo acuto rettilineo, ed il rimanente contenuto dalla circonferenza CHB, e dalla linea retta BE è minore di ogni angolo acuto rettilineo; perciocchè, se vi è qualche angolo rettilineo maggiore del contenuto dalla linea retta BA, e dalla circonferenza CHB, è minore del contenuto dalla circonferenza CHB, e dalla linea retta BE, nel luogo, che è fra la circonferenza CHB, e la linea retta BE, caderà qualche linea retta, che farà l'angolo

19. del prim.

gola

golo maggiore del contenuto dalla linea retta BA, e dalla circonferenza CHB, che è contenuto da linee rette; e minore del contenuto dalla circonferenza CHB, e dalla linea retta BE, ma non ci cade; non sarà dunque l'angolo acuto contenuto da linee rette maggiore dell'angolo contenuto dalla linea retta BA, e dalla circonferenza CHB, e minore del contenuto dalla circonferenza CHB, e dalla linea retta BE; lo che bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

Di quì è manifesto, che la linea retta, la qual si tira dalla estremità del diametro ad angoli retti, tocca il cerchio, e che la linea retta tocca il cerchio in un punto solo, perciocchè quella, che passa per due punti, cade di dentro, come già si è dimostrato.

SCO-

SCOLIO.

Essendochè tra i luoghi degli Elementi d' Euclide con varietà d' opinione agitati, uno sia quello ormai vulgatissimo intorno all' angolo detto del contatto, del quale si fa menzione in questo passato Teorema, par dovere, che quì piuttosto, che altrove si soddisfaccia alla curiosità di coloro, i quali ne desiderano qualche notizia. E perchè il Galileo, e Vincenzio Viviani ultimo suo Discepolo non solo hanno gran parte in questi Elementi, ma ancora il detto, ed affermato da loro sopra all' angolo del contatto è assai plausibile, e molto breve, perciò s' è risoluto trascrivere in questo luogo il lor parere, e non quello d' altri Autori.

PA-

PARERE DEL GALILEO

Intorno all' Angolo del contatto spiegato da esso in una Lettera di risposta scritta dalla Villa d' Arcetri ne' 30. Ottobre 1635. a Giovan Cammilla Gloriosi Matematico Napoletano, e stampata da questo nella sua terza Deca dell' Esercitazioni Matematiche a faccie 146. dell' impressione di Napoli nel 1639. in quarto.

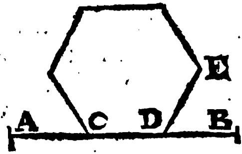
Dopo d' accusare la ricevuta di questa Deca inviatagli dall' Autore, così segue il Galileo.

IN tanto, per segno di aver pur veduto qualcosa delle sottilissime speculazioni di V. Sig., voglio conferirle certo mio discorso, che gran tempo fa mi passò per la fantasia, per provare, che l' angolo del contatto sia detto così equivocamente, e che insomma non sia veramente angolo, convenendo in questo col Vieta, le cui ragioni molto acutamente par che V. Sig. vada redarguendo; sicchè, se mi mostrerà la fallacia della mia, che mi par poco men, che concludente dimostrazione, bisognerà ch'io sia con Lei.

Stando dunque sulla ricevuta definizione, che *l'Angolo sia l'inclinazione di due linee poste in un piano, che si toccano in un punto, e non son poste fra loro per diritto*; figuriamoci un Poligono rettilineo, ed equilatero inscritto nel Cerchio. E' manifesto le inclinazioni, o direzioni de' suoi lati esser tante quante gli stessi lati, se saranno di numero dispari, ovvero quante la metà, se il numero sarà pari, avendo gli opposti la medesima direzione. Ora, se intenderemo a qualsisia linea retta AB *della seguente figura* esser applicato il lato CD d'uno di detti Poligoni, questo con quella non formerà angolo, camminando amendue per la medesima direzione, ma ben lo formerà il lato seguente DE, come quello, che sopra la segnata retta si eleva, ed inclinandosegli sopra la tocca. E perchè 'l cerchio si concepisce esser un Poligono di lati infiniti, è necessario, che nel suo perimetro sieno tutte le direzioni, cioè infinite; e però vi è quella di qualsivoglia linea retta segnata, la quale non può intendersi essere altra, che quella del lato (degl' infiniti,

che

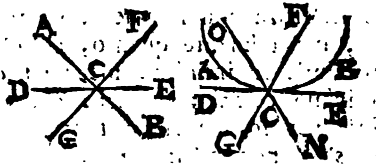
che ne ha il cerchio) che ad essa sia applicato; adunque quello del Cerchio, che alla linea retta si applica, non forma angolo con essa; e tale è il punto del contatto. Quì poi non si può dire, che sebbene il punto, che tocca, non contiene angolo colla



tangente, tuttavia pur lo contenga il punto contiguo conseguente; siccome nel Poligono, non il lato, che s' applica alla retta proposta; ma il lato seguente è quello, che l' angolo forma, e costituisce; non si può, dico, dir questo, perchè il punto, che succede a quel del contatto, non tocca la retta, la quale da un sol punto del Cerchio, e non da più vien toccata; ma nella definizione dell' angolo si ricerca, oltre all' inclinazione, il toccamento ancora; adunque il chiamato angolo del contatto è con errore detto così, nè è veramente angolo, nè ha grandezza alcuna.

Sovviemmi anco, oltre a molti altri, aver fatto un discorso in cotal forma.

Se stando ferma la DE, intenderemo la segante AB girarsi sopra il punto del segamento C, sicchè dallo stato AB calando A verso D, trapassi in GF, facendo l' angolo FCB superiore alla DE, dove prima conteneva l' inferiore ECB; è manifesto l' angolo BCE andarsi per tal conversione inacutendo, e restringendo in modo, che finalmente la sua quantità si annichili,



e del tutto svanisca, lo che accaderà quando essa retta AB si congiugnerà colla DE. Ora applicando lo stesso discorso all' arco ACB segato dalla retta ON nel punto C, costituendo i supposti angoli misti ACO, NCB; se intenderemo essa retta ON girarsi sopra il punto C, da O verso D inacutendo i detti angoli, e finalmente trapassando nello stato di GCF, sicchè l' angolo inferiore NCB si faccia superiore, come FCB, non compren-

do

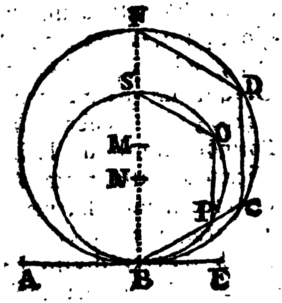
do come ciò possa accadere senza passar per l' annichilazione di essi angoli, la quale annichilazione non può essere, se non quando essa retta convertibile non segasse più la curva ACB, lo che avviene quando essa si unisce colla tangente DE. Nell' arco dunque, e nella tangente non sono angoli, ma l' annichilazione degli angoli.

Il discorso anco, che vien fatto per confermare, che l' angolo della contingenza non solamente sia quanto, ma talmente quanto, ch' e' sia divisibile in infinito, mentre si descrivano cerchi maggiori, che passino per lo medesimo toccamento, è, s' io non m' ingamno, manchevole; imperciocchè non l' angolo, il quale dico non aver quantità, ma ben lo spazio tra la circonferenza del minor cerchio, e la retta tangente vien diviso, e suddiviso dalle maggiori, e maggiori circonferenze; lo che assai chiaramente mi pare, che si possa mostrare coll' esempio de' molti Poligoni rettilinei simili, e disegualli nella seguente maniera.

Sieno nella retta MB perpendicolare alla AE, i centri M, N; di due cerchi disuguali toccanti la

A E

AE nel medesimo punto B, ed intendasi nel minore inscritto un Poligono equilatero, del quale sieno lati le rette BI, IO, OS, e prolungata la BI termini nella circonferenza del cerchio maggiore nel punto C; è manifesto la linea BC esser un lato del Poligono similmente inscritto nel cerchio maggiore, nel quale le due CD, DF sieno lati conseguenti. Quì si vede, che 'l perimetro FDCB divide ben lo spazio intercetto tra 'l perimetro del Poligono SOIB, e la retta BE; ma non però vien diviso l'angolo IBE, essendo il lato IB parte del lato BC, ed esso angolo IBE comune, anzi lo stesso del fatto dalla EB, e da i due lati de' Poligoni BI, IC; e discorrendo nello stesso modo di tutti gli altri Poligoni tra loro simili, di qualunque numero di lati, e quanto si voglia differenti in grandezza, l'angolo IBE



sarà

sarà sempre comune, nè giammai segato, ma ben' andrà sempre facendosi più acuto, moltiplicandosi i lati del Poligono; vero è, che l' angolo IBE sarebbe esso ancora diviso dal lato d' un Poligono maggiore, tuttavolta, ch' e' fosse di più lati, ed in conseguenza dissimile. Di quì mi pare, che si possa ritrarre, che essendo i cerchi tutti Poligoni simili di lati infiniti, applicandoli alla retta AE nel comune toccamento B, venga ben lo spazio tra la tangente, e l' arco interno BIOS diviso dall' arco esteriore BCDF; ma non già l' angolo B, essendo comune ad amendue i Poligoni; e l' essere i cerchi tutti poligoni simili di lati infiniti, toglie il potersi dire il cerchio maggiore esser poligono di più lati, che il minore; e perciò atto a dividerli il suo angolo; perchè, siccome non si può intendere poligono alcuno potersi iscrivere in un cerchio, benchè immenso, di lati innumerabili, che uno di altrettanti (e però simile) non si possa iscrivere in qualsivoglia altro, benchè piccolissimo, così non si può dire, che l' angolo del contatto non sia uno, e comune ad amendue i cerchi; e se tale

an-

angolo non è divisibile, non è quanto, e se non è quanto, non è vero angolo, ma equivocamente così detto.

Considerisi appresso, che, siccome moltiplicandosi più, e sempre più nel cerchio SOB il numero de' lati del poligono, l'angolo IRE sempre si fa più acuto, pare, che per necessaria conseguenza ne segua, che dove i lati sieno infiniti, tal' angolo sia infinitamente acuto, cioè non quanto, e non angolo, ec.

Segue dipoi il Galileo con altro breve Capitolo esaminando alcune conclusioni, che il Gloriosi inferisce dalle ragioni addotte dal sopranominato Francesco Vieta: ma essendochè per l' intelligenza di tali ponderazioni converrebbe riferire e ciò, che scrisse l' istesso Vieta, e ciò, che v' appose il Gloriosi, colla risposta di questo al medesimo Galileo, onde troppo in lungo s' andrebbe, si tralascia di trascriver più oltre esso Capitolo, rimettendo i Curiosi, a soddisfarsi pel rimanente ne' proprj Autori; poichè non s' è preteso di portar quì il progresso tutto della questione, colle proposte, e risposte altrui, ma solamente le principali ragioni, che a stimar nullo tal' angolo mossero il Galileo, al di cui parere liberamente si sot-

sottoscrisse Vincenzio Viviani, mosso non solo dalle ragioni del suo maestro, ma da molt' altre delle proprie, alcune delle quali son queste.

Altre ragioni di Vincenzio Viviani per dimostrare la nullità dell'angolo del contatto.

Se fra le condizioni dell'angolo piano volle Euclide nella definizione di esso, quella ancora, che le linee costituentilo non sieno poste fra loro in diritto, parmi, che di quì assai manifestamente si comprenda, ch'ei non intese per modo alcuno di chiamar con quel nome l' incontro d' una linea curva con una retta, e perciò non quello della circonferenza d' un cerchio colla retta linea toccantelo, essendo assolutamente impossibile costituire, o adattare una linea curva, talmentechè ella torni in dirittura con una retta, e tanto più è impossibile il far ciò con due curve insieme congiunte; onde non potendosi mai con esse linee effettuare la vietata posizione, superfluamente, e fuori di proposito l' avrebbe egli esclusa da simil sorta d' accappiamento. Se dunque egli stimò necessaria alla defi-

nizio-

nizione dell' angolo piano quella particolare eccezione, parmi, che di quì concluder si debba, che egli intese di parlar d' angoli fatti solo da quelle linee, che qualche volta coll' eccettuata posizione si abbattono d' accoppiarsi: E tali sono le linee rette solamente, due delle quali toccandosi in qualche punto comune ad esse, possono dopo l' infinite inclinazioni, e aperture sempre maggiori, giugnere finalmente a situarsi tra loro in una medesima dirittura. Di quì è, che io mi fo a credere, che Euclide adducesse la definizione solamente per l' angolo rettilineo, e non quella generale per questo, e per gli altri, chiamati comunemente curvilinei, connicolari, e misti, ec. E ciò maggiormente mi si conferma dall' osservare, che il medesimo Euclide in tutti i suoi Elementi, ed in ogni altra sua Opera cognita a noi, non propone mai, come si dice, ex professo, di dimostrare alcun Teorema, o di risolver Problema intorno agli angoli, che son detti curvilinei, nè gli paragona mai fra di loro, come egli fa in più luoghi de' rettilinei. Che se nel suo terzo Libro si trova, che tali accoppiamenti fatti dalla circonferenza del cerchio con una retta, che lo tocchi, o da quella, che passi per lo suo centro, o *da altre, che lo seghino vengono paragonati nella proposizione precedente con gli angoli acuti rettilinei, e nella 31. coll' angolo retto, io non son lontano dal creder quello, di che sospettò col Peletario quel sublime ingegno Francese tra' Restauratori dell' antica Geometria forse il primo, dico Francesco Vieta, che queste tali comparazioni sieno state aggiunte alla fine di dette Proposizioni da qualche bello spirito degli Antichi, o come sogliamo dire, da qualche Saccente: anzi tengo per fermo, che cotal' uomo le cavasse quivi come Corollarj delle medesime proposte d' Euclide, onde poi a contemplazione di queste sue aggiunte gli convenisse alterar la definizione dell' angolo premessa da Euclide al suo primo Libro, la quale stando forse così* (Angolo è quella scambievole inclinazione di due linee rette poste in un piano, che toccandosi in un punto non son poste in dirittura fra di loro) *la riformasse per farla più generale, e che servisse a quelle sue aggiunte, con levar la condizione di* rette *alle linee, e così la riducesse universale per tutti gli angoli da lui intesi, e che di poi v' aggiugnesse di proprio la definizione particolare pe' soli rettilinei, siccome ancora, che al terzo Libro premettesse la definizione per gli*

gli angoli delle porzioni, la quale io per me stimo adattata a questi non meno impropriamente, che a quello chiamato del contatto. Ma in qualunque modo ciò sia seguito, non mi par già, ch' e' meriti il conto il diffondersi, e confondersi di vantaggio in simil contesa; poichè quando bene il tutto fosse veramente d' Euclide stesso, non so poi veder, che gran biasimo glie ne venga, e qual pregiudizio resulti alla stabilità de' fondamenti Geometrici, ond' egli occorra affannarsene col medesimo Vieta dicente, che non a torto si tiene per qualcuno tali conclusioni controverse essere adulterine ne sibi non satis constet Euclides, & alioqui Geometrica multa corruant fundamenta; *perchè finalmente quando mai si concordi, o si conceda, che l' addotta definizione non si competa ad altri angoli, che a' rettilinei, e che questi soli come enti; e però come quanti sieno divisibili, e comparabili fra di loro, e che gli altri tutti impropriamente si chiamino angoli, e si voglia poi, non ostante, che le comparazioni de' curvilinei cò rettilinei sieno proprie d' Euclide, il maggior disordine, che accader possa in Geometria sarà, che le dette comparazioni fatte nel fine delle citate proposizioni del terzo Libro sieno impro-*

prie, o non vere, e conseguentemente n' avverrà, che il numero delle vere proprietà Geometriche (il qual non vi è dubbio, ch' e' sia infinito) manchi di un due, o di un tre al più. Ma che? esso numero pur tuttavia resterà infinito. Oltrechè quando tali conclusioni si togliessero affatto dagli Elementi, tutto il rimanente avrebbe per appunto suo vigor come prima, comecchè esse abbian fine nel medesimo lor principio, e da esse non dependa pur una delle tant' altre proprietà dimostrate in tutti i quindici Libri degli Elementi d' Euclide, o degli altri Trattati, che di lui ci son pervenuti alle mani.

Se altri poi sostenendo la parte contraria, dirà la definizione dell' angolo piano esser propria d' Euclide in quella forma, ch' ella vi si legge, ma che per esser posta universale tanto per l' accoppiamento delle linee curve, che delle rette, quella condizione, che esclude la posizione delle linee per diritto, riguarda solamente all' inclinazione, quand' elleno sieno rette; e però vi è necessaria; io facilmente mi accomoderò a concedergli il tutto senza contesa; ma gli soggiugnerò bene, che se è angolo ancora l' inclinazione, che ha una linea curva sopra una retta, egli mi assegni quale, e quanta sia la par-

parte di essa curva, la qual determina l'inclinazione colla medesima retta, cioè (se per esempio, essendo circonferenza di cerchio) se ne debbano prender novanta, e più gradi, ovvero ottanta, o quaranta, o dieci, o due, o uno, o un mezzo, ec. o pure, se (qualunque sia il numero de' gradi presi) l'angolo sia il medesimo sempre. La prima cosa non può dirsi, perchè non vi è ragione, per cui più un numero di gradi, che un altro stabilisca l'inclinazione della circonferenza colla retta. Non ancora la seconda, perchè dovendo le due linee costituenti l'angolo aver fra di loro direzioni diverse, e non la medesima, ma averle però ciascuna linea sempre verso una stessa parte, è vero, che quanto alla linea retta ell'ha direzione sempre verso quella parte secondo la quale ell'è distesa, tanto nel prenderne una picciola porzione, che una grande; ma la direzione della circonferenza non riguarda già verso la stessa parte nel termine d'un arco piccolo, che di un maggiore, e però essendo diverse le direzioni delle diverse parti della medesima curva, diversi ancora saranno gli angoli, che le dette parti fanno colla medesima retta linea, e non sempre gli stessi, come e' si pongono.

Se poi si dicesse, che le direzioni degli archi vanno prese non a' loro estremi termini, ma a quel punto dove esse convengono colla retta, io domando col Galileo, se in ciascbedun cerchio sono tutte le direzioni, sicchè non ne sieno più nel maggiore, che nel minore. E' forza dire, che in ciascuno sono tutte. Stante ciò io soggiungo col medesimo Galileo sull' ultima sua figura, che la direzione B E, che è la medesima, che quella del punto B dell' arco B I, doprà esser anco in qualche punto dell' arco B C, e questa non potrà essere altrove, che nel comun punto B: e però amendue gli archi B I, B C, e la retta B E hanno al punto B la medesima direzione; ma dove è la medesima direzione non si forma angolo, adunque, ec.

Dico inoltre col Galileo in primo luogo, che quando due cerchi si toccano per di fuori, una sola retta linea, e non più si può tirare per lo punto del lor contatto fra le circonferenze, la quale non le seghi, e questa è la tangente qualunque de' cerchi a quel punto stesso del contatto: adunque la quantità dell' angolo fatto dalle dette circonferenze, è tanta, quanta è la quantità della larghezza di quella sola retta tangente, che passa fra di esse, che

è la

è lo stesso, che dire, quest' angolo non ha quantità: L' angolo poi formato dalla retta tangente, e da una sola delle dette circonferenze sarà quanto è la metà della larghezza della medesima retta tangente, cioè similmente sarà non quanto.

Secondariamente, che d' ogni angolo rettilineo quanto, se ne può assegnare un minore, sicchè quell' angolo, che di tutti i rettilinei quanti è minore, bisogna, ch' e' sia non quanto, ma il minore di tutti gli acuti rettilinei quanti, è quello, che si fa dalla circonferenza del cerchio, e dalla retta linea tangente per la Proposizione precedente d' Euclide, adunque tal' angolo è non quanto, cioè non è angolo, ma impropriamente così detto.

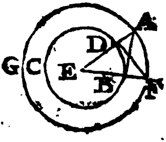
Oltre all' addotte, altre ragioni vi sarebbero per confermare il non essere di sì fatt' angolo; ma perchè in fine tal disputa è, come dir sogliamo, di lana caprina, chiunque ha più genio alle controversie di cose frivole (che di questi il Mondo letterato pur troppo abbonda) che alla sodezza delle verità irrefragabili Matematiche, potrà veder' a piacer suo ciò, che negando, o affermando ingegnosamente ne scrissero, oltre a' mentovati Autori, il Cardano, il Peltario, il Clavio, il Tacquet, ed altri celebri Matematici.

PROBLEMA II.

PROPOSIZIONE XVII.

Dal punto dato tirare una linea retta, che tocchi il dato cerchio.

Sia il punto dato A, ed il dato cerchio BCD, biſogna dal punto A tirare una linea retta, che tocchi il cerchio BCD.



1. di ques. Piglisi il centro del cerchio, che sia
11. del prim. E, e congiunta la AE, dal centro E coll' intervallo EA, deſcrivaſi il cerchio AFG, e dal punto D tiriſi la DF ad angoli retti ſopra la EA, e congiungaſi EF, AB. Dico, che dal punto A è tirata la AB, che tocca il cerchio BCD; perciocche eſſendo E centro de' cerchi BCD, AFG, ſarà la EA uguale alla EF, e la ED uguale alla EB; onde le due AE, EB ſono uguali alle due FE, ED, ed hanno l' angolo E, commune, adunque la baſe DF è uguale alla baſe AB, ed il triangolo DEF uguale al triangolo EBA,

e gli

e gli altri angoli agli altri angoli, e perciò l'angolo EBA è uguale all'angolo EDF, e l'angolo EDF è retto, onde anco EBA è retto, e la EB è femidiametro; ma quella, che è tirata dalla estremità del diametro del cerchio ad angoli retti, tocca il cerchio, adunque dal punto dato A si è tirata una linea retta AB, che tocca il cerchio BCD, lo che bisognava fare. *Per l'ant.*

TEOREMA XVI.

PROPOSIZIONE XVIII.

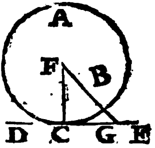
Se una linea retta tocca il cerchio, e dal centro si tira un'altra linea retta al toccamento, quella è perpendicolare sopra la linea, che tocca.

La linea retta DE tocchi il cerchio ABC nel punto C, e piglisi il centro del cerchio ABC, che sia F, dal quale tirisi la FC al C. Dico, che la FC è perpendicolare alla DE; ma se non è così tirisi dal punto F la FG perpendicolare *1. di quest. 12. del prim.*

 alla

alla DE, perchè dunque l'angolo FGC è retto, sarà GCF acuto, e perciò l'angolo FGC sarà maggiore dell'angolo FCG, ma il maggior lato è sottoposto al maggiore angolo, adunque la FC è maggiore della FG; e la FC è uguale alla FB, onde la FB sarà maggiore della FG, la minore della maggiore, che è impossibile. La FG dunque non è perpendicolare alla DE. Dimostreremo parimente, che non è altra linea fuor

19. del prim.



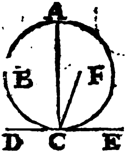
che la FC, laonde la FC è perpendicolare alla DE, se dunque una linea retta tocca il cerchio, e dal centro si tira un'altra linea retta al toccamento, quella è perpendicolare sopra la linea, che tocca, lo che bisognava dimostrare.

TEOREMA XVII.

PROPOSIZIONE XIX.

Se una linea retta tocca il cerchio, e dal toccamento si tira un'altra linea retta perpendicolare alla linea,

nea, che tocca, in quella è il centro del cerchio.



Una linea retta DE tocchi il cerchio ABC nel punto C, e tirisi dal punto C la CA perpendicolare alla DE. Dico, che 'l centro del cerchio è nella AC; non già, ma se è possibile, sia il centro F, e giungasi CF, perchè dunque una linea retta DE tocca il cerchio ABC, e la FC è tirata dal centro al toccamento, farà la FC perpendicolare alla DE, adunque l'angolo FCE è retto; e l'angolo ACE è parimente retto; onde l'angolo FCE è uguale all'angolo ACE, il minore al maggiore, che è impossibile, adunque F non è centro del cerchio ABC. Dimostreremo ancora, che non è in alcun'altra fuor, che in essa AC, onde se una linea retta tocca il cerchio, e dal toccamento si tira un'altra linea retta perpendicolare alla linea, che tocca, in quella è il centro del cerchio, lo che bisognava dimostrare.

32. del prim.

Per l'ant.

TEOREMA XVIII.

PROPOSIZIONE XX.

L'angolo, che è nel centro del cerchio è doppio di quello, che è nella circonferenza, quando hanno la medesima circonferenza per base.

Sia il cerchio ABC, nel cui centro E sia l'angolo BEC, ed nella circonferenza sia BAC, ed abbiano la medesima circonferenza BC per base.

Dico, che l'angolo BEC è doppio dell'angolo BAC. Giungasi la AE, e prolunghisi ad F, e perchè la
5. del prim. EA è uguale alla EB, sarà etiandio l'angolo EAB uguale all'angolo EBA; onde gli angoli EAB, EBA sono doppj dell'angolo EAB; ma l'angolo BEF è uguale agli
32. del prim. angoli EAB, EBA, adunque l'angolo BEF è doppio dell'angolo EAB, e per la medesima ragione

l'an-

l'angolo F E G è doppio dell'angolo B A G; onde tutto l'angolo B E C è doppio di tutto l'angolo B A C, pieghisi poi, e sia un altro angolo B D C, e giunta la D E prolunghisi nel G, dimostreremo similmente, che l'angolo G E C è doppio dell'angolo E D C, de' quali G E B è doppio dello E D B, adunque il rimanente B E C è doppio del rimanente B D C, onde l'angolo, che è nel centro del cerchio, è doppio di quello, che è nella circonferenza, quando hanno la medesima circonferenza per base, lo che bisognava dimostrare.

TEOREMA XIX.

PROPOSIZIONE XXI.

Gli angoli, che sono nella medesima porzione del cerchio, sono fra loro uguali.

Sia il cerchio A B C D E, e nella medesima porzione B A E D siano gli angoli B A D, B E D. Dico, che quelli fra loro sono uguali. Piglisi il centro del cerchio A B C D E, che sia F, e giungasi B F, F D, e quest- 1. di

per-

TEOREMA XVIII.

PROPOSIZIONE XX.

L'angolo, che è nel centro del cerchio è doppio di quello, che è nella circonferenza, quando hanno la medesima circonferenza per base.

Sia il cerchio ABC, nel cui centro E sia l'angolo BEC, ed nella circonferenza sia BAC, ed abbiano la medesima circonferenza BC per base.

Dico, che l'angolo BEC è doppio dell'angolo BAC. Giungasi la AE, e prolunghisi ad F, e perchè la
5. del prim. EA è uguale alla EB, sarà etiandio l'angolo EAB uguale all'angolo EBA; onde gli angoli EAB, EBA sono doppj dell'angolo EAB; ma l'angolo BEF è uguale agli angoli EAB, EBA, adunque l'an-
32. del prim. golo BEF è doppio dell'angolo EAB, e per la medesima ragione

l'an-

l'angolo FEG è doppio dell'angolo BAG, onde tutto l'angolo BEC è doppio di tutto l'angolo BAC, pieghisi poi, e sia un altro angolo BDC, e giunta la DE prolunghisi nel G, dimostreremo similmente, che l'angolo GEC è doppio dell'angolo EDC, de' quali GEB è doppio dello EDB, adunque il rimanente BEC è doppio del rimanente BDC, onde l'angolo, che è nel centro del cerchio, è doppio di quello, che è nella circonferenza, quando hanno la medesima circonferenza per base, lo che bisognava dimostrare.

TEOREMA XIX.

PROPOSIZIONE XXI.

Gli angoli, che sono nella medesima porzione del cerchio, sono fra loro uguali.

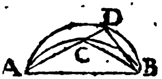
Sia il cerchio ABCDE, e nella medesima porzione BAED siano gli angoli BAD, BED. Dico, che quelli fra loro sono uguali. Pigliisi il centro del cerchio ABCDE, che sia F: e giungasi BF, FD, e quel- 1. di

per-

TEOREMA XXI.

PROPOSIZIONE XXIII.

Nella medesima linea retta due porzioni di cerchi simili, e disuguali non si costituiranno giammai dalla medesima parte.



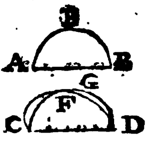
Costituiscansi, se però è possibile, nella medesima linea retta A B due porzioni di cerchi simili, e disuguali, e dalla medesima parte, A C B, A D B: e tirisi A C D, e giungansi C B, B D, perchè dunque la porzione A C B è simile alla porzione A D B, e simili porzioni de' cerchi sono quelle, che pigliano angoli uguali, sarà l'angolo A C B uguale all'angolo A D B, l'esteriore all'interiore, che non è possibile, adunque nella medesima linea retta due porzioni di cerchi simili, e disuguali non si costituiranno giammai dalla medesima parte, lo che bisognava dimostrare.

TEO-

TEOREMA XXII.

PROPOSIZIONE XXIV.

Simili porzioni di cerchi fatte nelle linee rette uguali, sono uguali fra loro.



Siano nelle linee rette uguali AB, CD simili porzioni di cerchi AEB, CFD. Dico, che la porzione AEB è uguale alla porzione CFD; perciocchè adattandosi la porzione AEB alla porzione CFD, e posto il punto A sopra il punto C, e la linea retta AB sopra la CD, eziandio il punto B si adatterà al punto D; perchè la AB è uguale alla CD; e adattandosi la linea retta AB alla retta CD, si adatterà ancor la porzione AEB alla porzione CFD, che se la linea AB si adatterà alla CD, e la porzione AEB non si adatterà alla porzione CFD; ma si muterà come CGD: il cerchio CGD segherà il cerchio CFD in

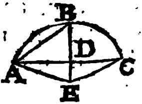
più

più di due punti, cioè ne' punti C, G, D, lo che è impossibile, onde non è vero, che adattandosi la linea retta A B alla C D non si adatti ancor la porzione A E B alla porzione C F D, e però si adatterà, e sarà uguale ad essa, adunque simili porzioni di cerchi fatte nelle linee rette uguali sono uguali fra loro, lo che bisognava dimostrare.

PROBLEMA III.

PROPOSIZIONE XXV.

Data una porzione di cerchio descrivere il cerchio, del quale ella è porzione.



Sia la data porzione di cerchio A B C, bisogna descrivere il cerchio della porzione A B C, di cui ella è
10. del prim. porzione. Seghisi la A C per mezzo in D, e dal punto D tirisi la
11. del prim. D B ad angoli retti sopra la A C, e giungasi A B, adunque l'angolo A B D o è maggiore dell' angolo B A D, o minore, o uguale. Sia dun-

dunque maggiore, e costituiscasi nella linea retta BA, e nel dato punto in essa A l'angolo BAE uguale all'angolo ABD, e prolunghisi la BD in E, e giungasi EC, perchè dunque l'angolo ABE è uguale all'angolo BAE, sarà la linea retta BE uguale alla EA, e perchè la AD è uguale alla DC, e la DE comune, le due AD, DE sono uguali alle due CD, DE, l'una all'altra, e l'angolo ADE è uguale all'angolo CDE, conciossiacosachè l'uno, e l'altro sia retto, adunque eziandío la base AE è uguale alla base EC; ma si è dimostrata la AE uguale alla EB, onde la BE è uguale alla EC, e perciò le tre linee rette AE, EB, EC sono fra loro uguali, adunque dal centro E coll'intervallo di una di esse AE, EB, EC descrivendosi il cerchio passerà eziandío per gli altri punti, laonde data la porzione del cerchio si è descritto il cerchio, di cui ella è porzione, lo che bisognava fare.

23. del prim.

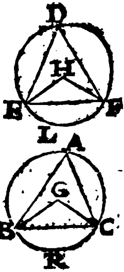
6. del prim.

TEO-

TEOREMA XXIIII.

PROPOSIZIONE XXVI.

Ne' cerchi uguali gli uguali angoli si fermano sopra le circonferenze uguali, o siano gli angoli a' centri, ovvero alle circonferenze.



Siano A B C, D E F cerchi uguali, ed in essi angoli uguali B G C, E H F a' centri, e B A C, E D F alle circonferenze. Dico, che la circonferenza B K C è uguale alla circonferenza E L F. Giungansi B C, E F; e perchè i cerchi A B C, D E F sono uguali, saranno anche i lor semidiametri uguali, adunque le due B G, G C sono uguali alle due E H, H F, e l'angolo G uguale all'angolo H, onde la base B C è uguale alla base E F, oltre a ciò, perchè l'angolo A è uguale all'angolo D, la porzione B A C sarà simi-

Diff. 1. di quest.

4. del prim.

mile alla porzione EDF, e sono nelle linee rette uguali BC, EF; ma le simili porzioni de' cerchi nelle linee rette uguali sono uguali fra loro, adunque la porzione BAC è uguale alla porzione EDF; ma tutto il cerchio ABC è uguale a tutto DEF, onde la rimanente circonferenza BRC sarà uguale alla rimanente ELF, adunque ne' cerchi uguali gli uguali angoli si fermano sopra le circonferenze uguali, o siano gli angoli a' centri, ovvero alle circonferenze, lo che bisognava dimostrare.

Diff. 10. di quest. 24. di quest.

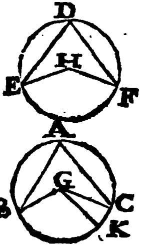
TEOREMA XXIV.

PROPOSIZIONE XXVII.

Ne' cerchi uguali gli angoli, che si fermano sopra le circonferenze uguali, sono uguali fra loro, o siano a' centri, ovvero alle circonferenze.

Ne' cerchi uguali ABC, DEF, e nelle circonferenze uguali BC, EF, siano gli angoli a' centri BGC, EHF, e alle circonferenze BAC, EDF. Dico, che l'angolo BGC è ugua-

uguale all' angolo EHF, e l' angolo BAC all' angolo EDF; perciocchè, se l' angolo BGC è uguale all' angolo EHF, è manifesto ancor l' angolo BAC esser uguale all' angolo EDF; ma se non è così, uno di essi sarà maggiore: sia maggiore BGC, e costituiscasi nella linea retta BG, e nel punto G, che è in essa, l' angolo BGK uguale all' angolo EHF; ma gli uguali angoli si fermano sopra le circonferenze uguali, quando sono a' centri, adunque la circonferenza BK è uguale alla circonferenza EF, e la circonferenza EF è uguale alla circonferenza BC, onde la BK è uguale alla BC, la minore alla maggiore, che è impossibile, adunque l' angolo BGC non è disuguale all' angolo EHF, e perciò è uguale, e l' angolo A è la metà dell' angolo BGC, e l' angolo D la metà dell' angolo EHF, onde l' angolo A è uguale al D, adunque ne' cerchi uguali gli angoli, che si fermano sopra le circonferenze uguali, sono uguali fra loro, o siano a' centri,



20. di ques.

Per l'ant.

20. di ques.

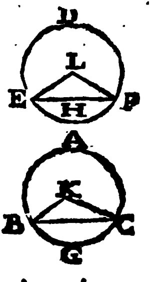
ov-

ovvero alle circonferenze, lo che bisognava dimostrare.

TEOREMA XXV.

PROPOSIZIONE XXVIII.

Ne' cerchi uguali le uguali rette linee tagliano circonferenze uguali, cioè la maggiore uguale alla maggiore, e la minore alla minore.

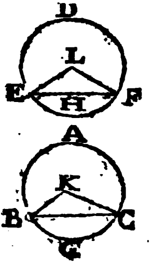


Siano i cerchi ABC, DEF uguali, ed in essi le uguali rette linee BC, EF, che taglino le circonferenze BAC, EDF maggiori, e le BGC, EHF minori. Dico, che la circonferenza BAC maggiore è uguale alla maggiore EDF, e la minore BGC alla minore EHF. Piglinsi i centri de' cerchi K, L, e giungansi BK, KC, EL, LF; e perchè i cerchi sono uguali, saranno eziandío uguali i lor semidiametri, adunque

1. di quest.

Diff. 1. di quest.

8. del prim. 26. di quef. que le due BK, KC sono uguali alle due EL, LF, e la base BC è uguale alla base EF, onde l'angolo BKC è uguale all'angolo ELF; ma gli angoli uguali si fermano sopra le uguali circonferenze, quando sono a' centri, e però la circonferenza BGC è uguale alla circonferenza EHF; ma tutto il cerchio ABC è uguale a tutto il cerchio DEF, onde la rimanente circonferenza BAC sarà uguale alla rimanente EDF, adunque ne' cerchi uguali le uguali rette linee tagliano circonferenze uguali, cioè la maggiore alla maggiore, e la minore alla minore, lo che bisognava dimostrare.



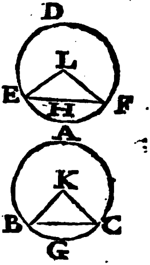
TEOREMA XXVI.

PROPOSIZIONE XXIX.

Ne' cerchi uguali sotto l'uguali circonferenze son poste linee rette uguali.

Siano i cerchi uguali ABC, DEF, e piglinsi in essi le circonferenze BGC,

BGC, EHF uguali, e giungasi BC, EF. Dico, che la linea retta BC è uguale alla retta EF. Piglinsi i centri de' cerchi K, L, e giungansi BK, KC, EL, LF; perchè dunque la circonferenza BGC è uguale alla circonferenza EHF, sarà l'angolo BKC uguale all'angolo ELF, e perchè i cerchi ABC, DEF sono uguali, saranno uguali ancora i semidiametri, adunque le due BK, KC sono uguali alle due EL, LF, e contengono angoli uguali, onde la base BC è uguale alla base EF, adunque ne' cerchi uguali sotto l'uguali circonferenze son poste linee rette uguali, lo che bisognava dimostrare.



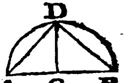
PROBLEMA IV.

PROPOSIZIONE XXX.

Dividere una data circonferenza per mezzo.

Sia la data circonferenza ADB, bisogna dividerla per mezzo. Giungasi A B, e dividasi per mezzo nel C, e dal punto C tirisi la C D ad angoli retti sopra la A B, e giungasi A D, D B; perchè dunque la A C è uguale alla C B, e la C D comune, le due A C, C D sono uguali alle due B C, C D, e l'angolo ACD è uguale all' angolo B C D, essendo l'uno, e l'altro retto, adunque la base A D è uguale alla base D B; ma le linee rette uguali tagliano circonferenze uguali, la maggiore alla maggiore, e la minore alla minore, ed è l'una, e l'altra di esse A D, B D minore del mezzo cerchio, onde la circonferenza A D sarà uguale alla circonferenza D B, adunque una data circonferenza si è divisa per mezzo, lo che bisognava fare.

10. del prim.
11. del prim.
Post. 4.
4. del prim.
28. di ques.

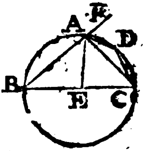


TEOREMA XXVII.

PROPOSIZIONE XXXI.

Nel cerchio l'angolo, che è nel mezzo cerchio, è retto, e quello, che è nella maggior porzione, è mi-

minore del retto; e quello, che è nella minor porzione, è maggiore del retto: oltre a questo l'angolo della porzion maggiore è maggior del retto, e l'angolo della porzion minore è minore del retto.



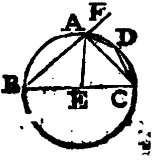
Sia il cerchio A B C D, il cui diametro B C, ed il centro E, e giungasi B A, A C, A D, D C. Dico, che l'angolo, che è nel mezzo cerchio B A C è retto, e quello, che è nella porzione A B C maggiore del mezzo cerchio, cioè l'angolo A B C, è minore del retto, e quello, che è nella porzione A D C minore del mezzo cerchio, cioè l'angolo A D C, è maggiore del retto. Giungasi A E, e prolunghisi la B A in F, perchè dunque la B E è uguale alla E A, l'angolo E A B sarà uguale all'angolo E B A, e similmente perchè la E A è uguale alla E C, sarà l'angolo A C E uguale all'angolo C A E, adunque 5. del prim.

 tut-

tutto l'angolo BAC è uguale agli
32. del prim. due angoli ABC, ACB, e l'angolo FAC fuori del triangolo ABC
13. del prim. è uguale agli due ABC, ACB, l'angolo dunque BAC è uguale all'angolo FAC, e perciò l'uno,
17. del prim. e l'altro di essi è retto, onde l'angolo BAC nel mezzo cerchio BAC è retto, e perchè i due angoli ABC, BAC del triangolo ABC sono minori di due retti, e BAC è retto, sarà l'angolo ABC minore del retto, ed è nella porzione ABC maggiore del mezzo cerchio: ed essendo nel cerchio il quadrilatero
22. di quest. ABCD, e ne' quadrilateri, che si descrivono ne' cerchi, gli angoli opposti sono uguali a due retti, saranno gli angoli ABC, ADC uguali a due retti, e l'angolo ABC è minore del retto, adunque il rimanente ADC sarà maggiore del retto, ed è nella porzione ADC minore del mezzo cerchio. Dico oltre a ciò, che l'angolo della porzion maggiore, che è contenuto dalla circonferenza ABC, e dalla linea retta AC, è maggiore del retto, e l'angolo della minor porzione contenuto dalla circonferenza ADC, e dalla linea retta AC, è minore del retto, lo che appare

ma-

manifestamente, perciocchè essendo l'angolo contenuto dalle linee rette BA, AC retto, sarà il contenuto dalla circonferenza ABC, e dalla linea retta AC maggiore del retto, e perchè l'angolo contenuto dalle linee rette CA, AF è retto, sarà quello, che è contenuto dalla linea retta CA, e dalla circonferenza ADC, minore del retto, adunque nel cerchio l'angolo, che è nel mezzo cerchio, è retto, e quello, che è nella porzion maggiore, è minore del retto; e quello, che è nella minor porzione, è maggiore del retto; oltre a questo l'angolo della porzion maggiore è maggiore del retto; e l'angolo della porzion minore è minore del retto, lo che bisognava dimostrare.



COROLLARIO.

Di quì è manifesto, che se un angolo del triangolo sia uguale agli altri due angoli, egli sarà retto, pereiocchè l'angolo conseguente è uguale a' medesimi due, e quando gli angoli conseguenti sono uguali, è necessario, che sieno retti.

TEOREMA XXVIII.

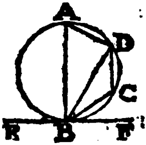
PROPOSIZIONE XXXII.

Se una linea retta tocca il cerchio, e dal toccamento nel cerchio sia tirata una linea retta, che lo seghi, gli angoli, che ella fa colla linea, che tocca, sono uguali a quelli, che si costituiscono nell' altre porzioni del cerchio.

La linea retta EF tocchi il cerchio ABCD nel punto B, e dal punto B tirisi nel cerchio ABCD una linea retta BD, che lo seghi in qualunque modo. Dico, che gli angoli, che fa la BD colla linea, che tocca EF, sono uguali a quelli, che

si

si costituiscono nell' altre porzioni del cerchio, cioè, che l' angolo FBD è uguale all' angolo costituito nella porzione D A B, cioè ad esso D A B, e l' angolo E B D uguale all' angolo D C B, costituito nella porzione D C B. Tirisi dal punto B la B A 11. del ad angoli retti sopra la E F, e pi- prim. gliši nella circonferenza B D qualsivoglia punto C, e giunganši A D, D C, C B; perchè dunque una linea retta E F tocca il cerchio ABCD 19. di nel punto B, e dal ques.



toccamento B è tirata una linea retta B A ad angoli retti sopra la E F, sarà nella B A il centro del cerchio A B C D, onde la B A è diametro Per del medesimo cerchio, e l' angolo l' ant. A D B nel mezzo cerchio è retto, adunque gli angoli rimanenti BAD, A B D sono uguali ad un retto; ma l' angolo A B F ancora è retto, e perciò è uguale agli angoli BAD, A B D, traggasi il comune A B D, onde il rimanente D B F è uguale a quello, che consiste nell' altra porzione del cerchio, cioè all' angolo B A D, e perchè nel cerchio 22. di è il quadrilatero A B C D, e gli an- ques. goli di esso opposti sono uguali a due retti, saranno gli angoli DBF, DBE uguali agli angoli BAD, BCD, de' quali BAD si è dimostrato uguale a DBF, adunque il rimanente DBE sarà uguale a quello, che è costituito nell' altra porzione del cerchio DCB, cioè a DCB, onde, se una linea retta tocca il cerchio, e dal toccamento nel cerchio sia tirata una linea retta, che lo seghi, gli angoli, ch' ella fa colla linea, che tocca, sono uguali a quelli, che si costituiscono nell' altre porzioni del cerchio, lo che bisognava dimostrare.

PROBLEMA V.

PROPOSIZIONE XXXIII.

Costituire una porzione di cerchio nella data linea retta, che pigli l' angolo uguale all' angolo rettilineo dato.

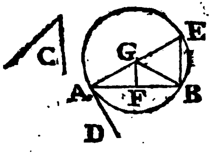
Sia la data linea retta AB, ed il dato angolo rettilineo C. Bisogna descrivere una porzione di cerchio nella data linea retta AB, che pigli l' angolo uguale all' angolo C.

Nel-

Nella data retta linea AB, e nel punto A dato in essa, costituiscasi l'angolo BAD uguale all'angolo C, e dal punto A tirisi la AE ad angoli retti sopra la AD, e seghisi la AB per mezzo in F, e dal punto F tirisi la FG ad angoli retti sopra la AB, e giungasi GB, perchè dunque la AF è uguale alla FB, e la FG comune, le due AF, FG sono uguali alle due BF, FG, e l'angolo AFG uguale all'angolo GFB, adunque la base AG è uguale alla base GB, onde dal centro G coll'intervallo AG descritto il cerchio passerà ancor per B, descrivasi, e sia ABE, e giungasi EB, e perchè dalla estremità del diametro AE, e dal punto A è tirata la AD ad angoli retti sopra la AE, toccherà la AD il cerchio, e perchè una linea retta AD tocca il cerchio ABE, e dal toccamento, che è in A, è tirata una linea retta AB nel cerchio ABE, l'angolo DAB sarà uguale all'angolo, che consiste nell'altra porzione del cerchio, cioè allo AEB; ma essendo l'angolo DAB uguale all'an-

23. del prim.

10. e 11. del prim.



4. del prim.

Coroll. della 16. di quef.

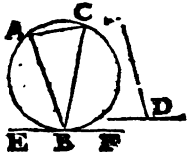
Per l'ant.

golo C, sarà l' angolo C uguale all' angolo A E B, onde nella data linea retta A B si è descritta la porzione del cerchio A E B, che piglia l' angolo A E B uguale all' angolo dato C, lo che bisognava fare.

PROBLEMA VI.

PROPOSIZIONE XXXIV.

Dal dato cerchio tagliare una porzione, che pigli l' angolo uguale all' angolo rettilineo dato.



Sia il cerchio dato A B C, ed il dato angolo rettilineo D. Bisogna dal cerchio A B C tagliare una porzione, che pigli l' angolo uguale all' angolo D. Tirisi la
17. di ques. linea retta E F, che tocchi il cerchio A B C nel punto B, e nella linea retta E F, e nel punto B,
23. del prim. che è in essa, costituiscasi l' angolo F B C uguale all' angolo D, e perchè la linea retta E F tocca il cerchio A B C nel punto B, e dal toc-

camento B è tirata la BC, l'angolo FBC sarà uguale a quello, 32. di ques.
che consiste nell'altra porzione del cerchio; ma FBC è uguale all'angolo D, adunque eziandío l'angolo, che è nella porzione BAC, sarà uguale all'angolo D, onde dal dato cerchio ABC si è tagliata una porzione BAC, che piglia l'angolo uguale all'angolo rettilineo dato D, lo che bisognava fare.

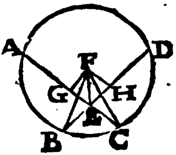
TEOREMA XXIX.

PROPOSIZIONE XXXV.

Se nel cerchio due linee rette si taglino fra loro, il rettangolo contenuto dalle parti di una è uguale al rettangolo, che si contiene dalle parti dell'altra.

Seghinsi fra loro le due linee rette AC, BD, nel cerchio ABCD nel punto E. Dico, che il rettangolo contenuto dalle AE, EC è uguale a quello, che si contiene dalle DE, EB. Piglisi il

12. del prim. centro del cerchio ABCD, che sia F, e da F tirinsi le FG,
1. di ques. FH perpendicolari alle linee rette AC, DB, e giungansi FB, FC, FE; perchè dunque una linea retta GF tirata per lo centro sega una linea retta AC non tirata per lo centro ad angoli retti, la sega
3. di ques. ancora per mezzo, onde la AG è uguale alla GC, e perchè la linea retta AC è divisa in parti uguali nel punto G, ed in parti disuguali nel punto E, sarà



5. del sec. il rettangolo contenuto dalle AE, EC insieme col quadrato di EG uguale al quadrato di GC, aggiungasi il quadrato di GF comune, adunque il rettangolo AEC, insieme co' quadrati di EG, GF, è uguale a' quadrati di CG, GF; ma il quadrato di FE è uguale a' qua-
47. del prim. drati di EG, GF, ed il quadrato di FC uguale a' quadrati di CG, GF, il rettangolo dunque AEC insieme col quadrato di FE è uguale al quadrato di FC, ma la CF è uguale alla FB, onde il rettangolo AEC insieme col quadrato di EF è uguale al quadrato di FB,

e per

e per la medesima ragione il rettangolo DEB insieme col quadrato di FE è uguale al quadrato di FB; adunque il rettangolo AEC insieme col quadrato di FE è uguale al rettangolo DEB insieme col quadrato di FE, sraggasi il quadrato comune di FE, sarà il rettangolo rimanente AEC uguale al rimanente DEB, onde se nel cerchio due linee rette si taglino fra loro, il rettangolo contenuto dalle parti di una è uguale al rettangolo, che si contiene dalle parti dell' altra, lo che bisognava dimostrare.

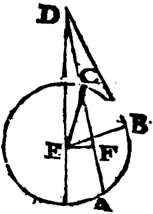
TEOREMA XXX.

PROPOSIZIONE XXXVI.

Se fuori del cerchio si pigli qualche punto, e da quello cadano nel cerchio due linee rette, delle quali una seghi il cerchio, e l' altra lo tocchi, il rettangolo contenuto da tutta la linea, che sega, e dalla parte presa di fuori fra 'l

pun-

punto, e la circonferenza curva, è uguale al quadrato della linea, che tocca.



Piglisi un punto D fuori del cerchio A B C, e da eſſo cadano nel detto cerchio, due linee rette D C A, e D B, e la D C A ſeghi il cerchio A B C, e la D B lo tocchi. Dico, che
1. di queſ. il rettangolo A D C è uguale al quadrato, che ſi fa dalla D B. Piglisi il centro E, e da E tiriſi la E F per-
12. del prim. pendicolare alla A C, e giunganſi E B, E C, E D, adunque l' angolo E F D è retto, e perchè una linea retta E F tirata per lo centro ſega una linea retta A C non tirata per lo centro ad angoli retti, la ſeghe-
3. di queſ. rà ancor per mezzo, onde la A F è uguale a F C; oltre a ciò, perchè la linea retta A C è ſegata per mezzo nel punto F, e ſe le aggiunge la C D, il rettangolo ADC inſieme col quadrato di F C è uguale al quadrato di F D. Pongaſi il
6. del sec. quadrato di F E comune, adunque il rettangolo A D C inſieme co' quadra-

drati delle CF, FE è uguale a' quadrati delle DF, FE; ma il quadrato di DE è uguale a' quadrati di DF, FE, perciocchè l' angolo EFD è retto, ed il quadrato di CE è uguale a' quadrati di CF, FE, adunque il rettangolo ADC insieme col quadrato di EC è uguale al quadrato di ED, e la CE è uguale alla EB, onde il rettangolo ADC insieme col quadrato di EB è uguale al quadrato di ED; ma al quadrato di ED sono uguali i quadrati di EB, BD, perciocchè l' angolo EBD è retto, adunque il rettangolo ADC insieme col quadrato di EB è uguale a' quadrati di EB, BD, traggasi il quadrato comune di EB, il rimanente dunque rettangolo ADC sarà uguale al quadrato di DB, laonde, se fuori del cerchio si pigli qualche punto, ec. lo che bisognava dimostrare.

47. del prim.

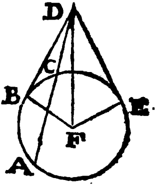
TEOREMA XXXI.

PROPOSIZIONE XXXVII.

Se fuori del cerchio si pigli qualche punto, e da quello cadano nel cerchio

due

due linee rette, una delle quali seghi, e l'altra s'accosti al cerchio, ed il rettangolo contenuto da tutta la linea, che sega, e dalla parte presa di fuori fra 'l punto, e la circonferenza curva, sia uguale al quadrato della linea, che s'accosta al cerchio, la linea, che s'accosta, toccherà il cerchio.



Piglisi fuori del cerchio A B C un punto D, e da quello cadano nel cerchio due linee rette D C A, D B, e la D C A seghi il cerchio, e la D B s'accosti ad esso, ed il rettangolo A D C sia uguale al quadrato, che si fa dalla D B. Dico, che la D B tocca il cerchio A B C. Tirisi una linea retta D E, che tocchi il cer-
17. di chio A B C, e piglisi il centro del
ques. cerchio A B C, che sia F, e giungasi

gasi FE, FB, FD, adunque l'angolo FED è retto, e perchè la DE tocca il cerchio ABC, e la DCA lo sega, il rettangolo ADC sarà uguale al quadrato di DE; ma il rettangolo ADC si pone uguale al quadrato di DB, onde il quadrato di DE sarà uguale al quadrato di DB, e perciò la linea DE è uguale alla DB, e la FE è uguale alla FB, adunque le due DE, EF sono uguali alle due DB, BF, e la base loro FD è comune, onde l'angolo DEF è uguale all'angolo DBF; ma DEF è retto, adunque DBF ancora è retto, e prolungandosi FB è diametro, e quella, che dalla estremità del diametro del cerchio è tirata ad angoli retti, tocca il cerchio, adunque la DB tocca il cerchio ABC necessariamente. Dimostreraffi ancora il medesimo, se il centro sia nella linea AC, laonde, se fuori del cerchio si pigli qualche punto, ec. lo che bisognava dimostrare.

17. di quest. Per l'ant. 8. del prim. Corollar. della 16. di quest.

Fine del Terzo Libro.

DE-

DEGLI ELEMENTI D' EUCLIDE

TRADOTTI IN VOLGARE

LIBRO QUARTO.

DEFINIZIONI.

I.

LA figura rettilinea si dice esser descritta in un'altra figura rettilinea, quando ciascun angolo della figura descritta tocca ciascun lato di quella, nella quale essa è descritta.

II.

Similmente la figura si dice esser descritta intorno ad un'altra figura, quando do ciascun lato della figura descritta tocca ciascun angolo di quella, intorno alla quale essa è descritta.

III.

La figura rettilinea si dice esser descritta nel cerchio, quando ciascun angolo della figura descritta tocca la circonferenza del cerchio.

IV.

La figura rettilinea si dice esser descritta intorno al cerchio, quando ciascun lato della figura descritta tocca la circonferenza del cerchio.

V.

Il cerchio parimente si dice esser descritto in una figura rettilinea, quando la circonferenza del cerchio

chio tocca ciascun lato della figura, nella quale egli è descritto.

VI.

Il cerchio si dice esser descritto intorno ad una figura rettilinea, quando la circonferenza del cerchio tocca ciascun angolo della figura, intorno alla quale egli è descritto.

VII.

La linea retta si dice adattarsi nel cerchio, quando l'estremità sue arrivano fino alla circonferenza del cerchio.

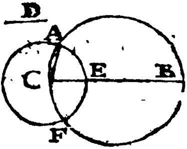
PROBLEMA I.

PROPOSIZIONE I.

Nel dato cerchio adattare una retta linea uguale ad un'altra data, la qua-

le

le non ſia maggiore del diametro.



Sia il cerchio dato ABC, e la linea retta data D, non maggiore del diametro del cerchio, biſogna adattare nel cerchio ABC la linea retta uguale alla D. Tiriſi il diametro del cerchio ABC, che ſia BC, e ſe BC è uguale alla D, ſarà fatto ciò, che ſi proponeva, perciocchè nel cerchio ABC ſi ſarà adattata la CB uguale alla linea retta D; ma ſe non è uguale, la BC è maggiore della D, pongaſi la CE uguale alla D, e dal centro C coll'intervallo CE deſcrivaſi il cerchio
3. del prim. AEF, e giungaſi CA, perchè dunque il punto C è centro del cerchio AEF, la CA ſarà uguale alla CE; ma la D è uguale alla
Diff. 15. del prim. CE, adunque eziandio la D ſarà uguale alla AC, onde nel dato cerchio ABC ſi è adattata la AC uguale alla data linea retta D non maggiore del diametro del cerchio, lo che biſognava fare.

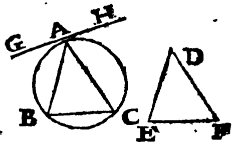
PRO-

PROBLEMA II.

PROPOSIZIONE II.

Nel datò cerchio descrivere un triangolo equiangolo ad un altro triangolo dato.

Sia il dato cerchio ABC, ed il triangolo dato DEF. Bisogna descrivere nel



cerchio A B C un triangolo equiangolo al triangolo D E F. Tirisi una linea retta G A H, che tocchi il cerchio A B C nel punto A, e nella linea retta A H, e nel punto in essa A, costituiscasi l'angolo HAC uguale all' angolo D E F. Poi nella linea retta A G, e nel punto in essa A costituiscasi l'angolo G A B uguale all' angolo D F E, e giungasi B C; perchè dunque una linea retta H A G tocca il cerchio A B C, e dal toccamento è tirata nel cerchio la A C, l'angolo H A C sarà uguale a quello, che è nell' altra porzio-

17. del terz.

23. del prim.

32. del terz.

zione del cerchio, cioè all' angolo ABC; ma l' angolo HAC è uguale all' angolo DEF, adunque l' angolo ABC è uguale all' angolo DEF, e per la medesima ragione l' angolo ACB è uguale all' angolo DFE; ed il rimanente BAC sarà uguale al rimanente EDF, adunque il triangolo ABC è equiangolo al triangolo DEF, ed è descritto nel cerchio ABC, onde nel dato cerchio si è descritto un triangolo equiangolo ad un altro triangolo dato, lo che bisognava fare.

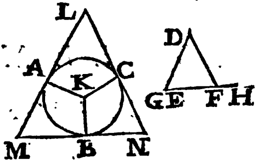
PROBLEMA III.

PROPOSIZIONE III.

D' intorno al dato cerchio descrivere un triangolo equiangolo ad un altro triangolo dato.

Sia il dato cerchio ABC, ed il triangolo dato DEF. Bisogna descrivere d' intorno al cerchio ABC un triangolo equiangolo al triangolo DEF. Prolunghisi da ciascuna parte la EF ne' punti H, G, e piglisi K centro del cerchio ABC, e la

la linea retta K B tirisi in qualſi- 1. del
voglia modo, e coſtituiſcaſi nella ter.
linea retta K B, e nel punto, che 23. del
è in eſſa K, l'angolo B K A ugua- prim.
le all'angolo D E G, e l'angolo 17. del
B K C uguale all'angolo D F H, e terzo.
per i punti A, B, C, tirinſi le linee rette L A M, M B N, N C L, che tocchino il cerchio A B C. Perchè dunque L M, M N, N L, toccano il cerchio A B C ne' punti A,
B, C, e dal 18. del ter.
centro K a' punti A, B, C ſi tirano

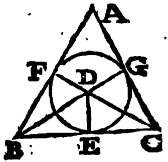


le linee rette K A, K B, K C, ſaranno gli angoli a' punti A, B, C retti, e perchè i quattro angoli del quadrilatero A M B K ſono uguali a quattro retti, dividendoſi in due triangoli, gli angoli de' quali K A M, K B M ſono retti, i rimanenti A K B, A M B ſaranno uguali a due retti, e gli angoli D E G, D E F ſono uguali a due retti, gli angoli dunque A K B, A M B ſono uguali agli angoli D E G, D E F, de' quali A K B è uguale a D E G, il rimanente dunque A M B ſarà uguale al rimanente D E F, dimostrerassi parimente, che l'angolo CNB è uguale all'angolo DFE, adunque il rimanente MLN è uguale al rimanente EDF, ed il triangolo LMN è equiangolo al triangolo DEF, ed è descritto intorno al cerchio ABC; onde dintorno al dato cerchio si è descritto un triangolo equiangolo ad un altro triangolo dato, lo che bisognava fare.

PROBLEMA IV.

PROPOSIZIONE IV.

Nel dato triangolo descrivere un cerchio.



Sia il triangolo dato ABC. Bisogna nel triangolo ABC descrivere un cerchio. Seghinsi gli angoli ABC,
9. del prim. BCA per mezzo colle linee rette BD, CD, le quali concorrano in-
12. del prim. sieme nel punto D, e dal punto D tirinsi le DE, DF, DG perpendicolari alle linee rette AB, BC, CA,

CA, e perchè l' angolo ABD è uguale all' angolo CBD, ed è l'angolo retto BED uguale al retto BFD, faranno due triangoli EBD, DBF, che hanno due angoli uguali a due angoli, ed un lato uguale ad un lato BD comune all' uno, e all' altro, che è sottoposto ad uno degli angoli uguali, adunque saranno gli altri lati uguali agli altri lati, e sarà DE uguale a DF, e per la medesima ragione DG sarà uguale a DE, onde DE è uguale a DF, adunque tre linee rette DE, DF, DG sono fra loro uguali, e perciò descrivendosi il cerchio dal centro D coll' intervallo di una di esse DE, DF, DG, passerà anche per gli altri punti, e toccherà le linee rette AB, BC, CA, essendo gli angoli E, F, G retti, perciocchè, se le segherà, quella, che è tirata dalla estremità del diametro del cerchio ad angoli retti caderà dentro al cerchio, che è inconveniente, adunque il cerchio descritto dal centro D coll' intervallo di una di esse DE, DF, DG non segherà le linee rette AB, BC, CA; adunque le toccherà, e sarà il cerchio descritto nel triangolo ABC, laonde nel da-

26. del prim.

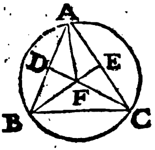
16. del terzo.

to triangolo si è descritto il cerchio, lo che bisognava fare.

PROBLEMA V.

PROPOSIZIONE V.

Dintorno al dato triangolo descrivere un cerchio.



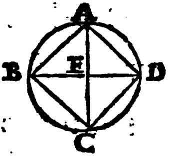
Sia il triangolo dato A B C, bisogna descrivere un cerchio dintorno al triangolo dato ABC. Seghinsi le A B,
10. *del prim.* A C per mezzo ne' punti D, E, e da D, E tirinsi le D F, E F ad
11. *del prim.* angoli retti sopra le B A, A C, le quali o concorreranno dentro al triangolo A B C, ovvero nella linea retta B C, o fuori di essa; concorrano dentro al triangolo nel punto F, e giungasi B F, F C, F A. Perchè dunque la A D è uguale
4. *del prim.* alla D B, e la D F è comune, e ad angoli retti, sarà la base A F uguale alla base F B; si dimostrerà parimente, che la C F è uguale alla F A, onde la B F ancora è uguale alla F C, adunque le F A, F B,

FB, FC sono fra loro uguali, e descrivendosi un cerchio dal centro F coll'intervallo di una di esse FA, FB, FC, passerà anche per gli altri punti, e sarà descritto il cerchio dintorno al triangolo ABC, descrivasi come ABC, lo che bisognava fare.

PROBLEMA VI.

PROPOSIZIONE VI.

Nel dato cerchio descrivere un quadrato.



Sia il dato cerchio ABCD, bisogna in esso descrivere un quadrato. Tirinsi AC, BD diametri del cerchio ABCD ad angoli retti fra loro, e giungasi AB, BC, CD, DA. Perchè dunque la BE è uguale alla ED, conciossiacosachè il punto E sia centro, e la EA è comune, e ad angoli retti, sarà la base BA uguale alla base AD, e per la medesima ragione l'una, e l'altra di esse BC, CD è uguale all'una, e l'altra

4. del prim.

tra BA, AD, il quadrilatero dunque ABCD è equilatero. Dico, che ancora è rettangolo, perciocchè essendo la linea retta BD diametro
31. del terzo. del cerchio ABCD, sarà BAD mezzo cerchio, onde l'angolo BAD è retto, e per la medesima ragione ciascuno di essi ABC, BCD, CDA è retto, adunque il quadrilatero ABCD è rettangolo, e si è dimostrato, che è equilatero, onde sarà necessariamente quadrato, ed è descritto nel cerchio ABCD, adunque nel dato cerchio si è descritto un quadrato, lo che bisognava fare.

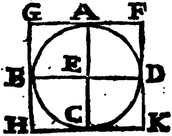
PROBLEMA VII.

PROPOSIZIONE VII.

Dintorno al dato cerchio descrivere un quadrato.

Sia il cerchio dato ABCD, bisogna descrivere un quadrato dintorno ad esso. Tirinsi due diametri del cerchio ABCD, cioè AC, BD ad angoli retti fra loro, e per i punti A, B, C, D tirinsi le FG, per

GH, HK, KF, che tocchino il cerchio ABCD. Perchè dunque la FG tocca il cerchio ABCD, e dal centro E al toccamento, che è nell'A, si tira la EA, gli angoli, che sono ad A saranno retti, 18. del terzo. per la medesima ragione gli angoli ne' punti B, C, D sono ancora retti, e perchè l'angolo AEB è retto, ed è retto parimente lo EBG,



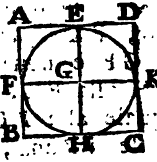
sarà la GH paralella alla AC, e per la medesima ragione la AC è paralella alla FK, 28 del prim. dimostreremo similmente, che l'una, e l'altra di esse GF, HK è paralella alla BED, e perciò la GF è paralella alla HK. Sono dunque GK, GC, AK, FB, BK, paralellogrammi, onde la GF è uguale alla HK, e la GH alla FK, e perchè la AC è uguale alla BD, ma la AC è uguale all'una, e l'altra di esse GH, FK, e la BD uguale all'una, e l'altra GF, HK, sarà l'una, e l'altra ancora GH, FK uguale all'una, e l'altra GF, HK; 34. del prim. il quadrilatero dunque FGHK è equilatero. Dico, che eziandío è rettangolo, perciocchè essendo GBEA pa-

paralellogrammo, ed essendo l' angolo A E B retto, sarà l' angolo A G B ancora retto; dimostreremo pari-
34. del prim.
mente, che gli angoli ne' punti H, K, F sono retti, adunque il quadrilatero F G H K è rettangolo, e si è dimostrato, che è equilatero, onde è necessario, che sia quadrato, ed è descritto dintorno al cerchio A B C D, adunque dintorno al dato cerchio si è descritto il quadrato, lo che bisognava fare.

PROBLEMA VIII.

PROPOSIZIONE VIII.

Nel dato quadrato descrivere un cerchio.



Sia il dato quadrato A B C D, bisogna in esso descrivere un cerchio. Seghisi l' una, e l' altra di esse A B, A D per mezzo ne' punti F E, e per E tirisi la E H paralella ad una di esse A B, C D, e per F tirisi la F K paralella ad una delle A D, B C, adunque ciascuno di essi A K, K B, A H, H D, A G, G C, B G, G D è paralellogrammo, ed i lati lo-

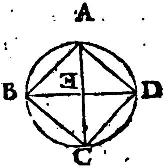
10. del prim.
31. del prim.

loro opposti sono uguali, e perchè 34. del
la DA è uguale alla AB, e la prim.
AE è la metà della AD, e la
AF la metà della AB, sarà la AE
uguale alla AF, onde i lati oppo-
sti sono ancora uguali, e perciò la
FG è uguale alla GE; dimostrere-
mo similmente, che l'una, e l'al-
tra di esse GH, GK è uguale al-
l'una, e l'altra FG, GB, le quat-
tro dunque GE, GF, GH, GK
sono fra loro uguali; onde descri-
vendosi un cerchio dal centro G
coll'intervallo di una di esse GE,
GF, GH, GK, passerà ancora per
gli altri punti, e toccherà le linee
rette AB, BC, CD, DA, perciocc-
chè gli angoli ne' punti E, F, H, K
sono retti, che se il cerchio segherà
le linee rette AB, BC, CD, DA,
quella, che dall'estremità del diame-
tro del cerchio è tirata ad angoli ret-
ti caderà dentro al cerchio, lo che
è inconveniente, adunque il cerchio 16. del
descritto dal centro G coll' inter- terzo.
vallo di una di esse GE, GF,
GH, GK non segherà le linee
rette AB, BC, CD, DA, per-
ciò necessariamente le toccherà, e
sarà descritto nel quadrato ABCD,
adunque nel dato quadrato si è descrit-
to un cerchio, lo che bisognava fare.

PROBLEMA IX.

PROPOSIZIONE IX.

Dintorno al dato quadrato descrivere un cerchio.



Sia il dato quadrato A B C D, bisogna dintorno ad esso descrivere un cerchio. Giunganfi A C, B D, che si seghino fra loro nel punto E; e perchè la D A è uguale alla A B, e la A C è comune, le due D A, A C sono u-
8. del prim. guali alle due B A, A C, e la base D C è uguale alla base C B, onde l'angolo D A C sarà uguale all' angolo B A C, l' angolo dunque D A B è segato per mezzo dalla linea retta A C; dimostreremo ancora, che ciascun angolo A B C, B C D, C D A è segato per mezzo dalle linee rette A C, B D, e perchè l' angolo D A B è uguale all' angolo A B C, ed è l' angolo E A B la metà dell' angolo D A B, e l' an-
6. del prim. golo E B A la metà dell' angolo A B C, sarà l' angolo E A B uguale all' an-

go-

golo EBA, onde ancora il lato EA è uguale al lato EB, dimostreremo similmente, che l'una, e e l'altra delle linee rette EC, ED è uguale all'una, e l'altra di esse EA, EB, adunque le quattro linee rette EA, EB, EC, ED sono fra loro uguali, e descrivendosi un cerchio dal centro E coll'intervallo di una di esse EA, EB, EC, ED, passerà anche per gli altri punti, e sarà descritto dintorno al quadrato ABCD, descrivasi come ABCD, adunque dintorno al dato quadrato si è descritto un cerchio*, lo che bisognava fare.

PROBLEMA X.

PROPOSIZIONE X.

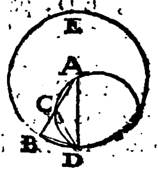
Costituire un triangolo equicrure, che abbia amendue gli angoli, che sono alla base, doppj del rimanente.

Sia una linea retta AB, e seghisi nel punto C, dimodochè il rettangolo contenuto dalle AB, BC *11. del sec.*

 sia

sia uguale al quadrato, che si descrive da CA; e dal centro A coll'intervallo AB descrivasi il cerchio BDE, e si adatti nel cerchio BDE una linea retta BD uguale alla AC, che non sarà maggiore del diametro del cerchio BDE, e giunte DA, DC descrivasi il cerchio ACD dintorno al triangolo ADC, adunque perchè il rettangolo ABC è uguale al quadrato, che si fa dalla AC, ed è la AC uguale alla BD, sarà il rettangolo ABC uguale al quadrato di BD; e perchè fuori del cerchio ACD si è preso un punto B, e dal B cadono nel cerchio ACD due linee rette BCA, BD, l'una delle quali sega, e l'altra cade sopra il cerchio, ed il rettangolo ABC è uguale al quadrato di DB, la linea retta DB toccherà il cerchio ACD, e perchè BD tocca, e dal toccamento, che si fa al D è tirata la DC, l'angolo BDC sarà uguale a quello, che è costituito nell'altra porzione del cerchio, cioè all'angolo DAC, ed essendo l'angolo BDC uguale al-

1. di ques.



Ult. del terzo.

32 del terzo.

all' angolo DAC, pongasi l'angolo CDA comune, adunque tutto BDA è uguale a' due angoli CDA, DAC, ma l'angolo esteriore BCD è uguale agli angoli CDA, DAC, laonde BDA ancora è uguale a BCD, ma l'angolo BDA è uguale all'angolo CBD, perciocchè il lato BD è uguale al lato AB, adunque DBA sarà uguale a BCD, e i tre angoli BDA, DBA, BCD saranno frà loro uguali, e perchè l'angolo DBC è uguale all'angolo BCD, sarà il lato BD uguale al lato DC, ma BD è posta uguale a CA, adunque eziandío AC è uguale a CD, e l'angolo CDA all'angolo DAC, onde gli angoli CDA, DAC sono doppj dell'angolo DAC, e l'angolo BCD è uguale agli angoli CDA, DAC, adunque BCD è doppio del DAC, ma BCD è uguale all'uno, e l'altro di essi BDA, DBA, e perciò l'uno, e l'altro BDA, DBA è doppio del DAB, laonde si è costituito un triangolo equicrure, che ha amendue gli angoli, che sono alla base, doppj del rimanente, lo che bisognava fare.

5. del prim.

6. del prim.

PRO-

PROBLEMA XI.

PROPOSIZIONE XI.

Nel dato cerchio descrivere un pentagono equilatero, ed equiangolo.

Sia il dato cerchio A B C D E, bisogna in esso descrivere un pentagono equilatero, ed equiangolo. Facciasi un triangolo equicrure F G H, che abbia ciascuno degli angoli G, H doppio dell'angolo F, e descrivasi nel cerchio A B C D E il triangolo A C D equiangolo al triangolo FGH, dimodochè C A D sia uguale all'angolo F, e ciascuno di essi A C D, C D A sia uguale a ciascuno degli angoli G, H, adunque l'uno, e l'altro A C D, C D A è doppio dell'angolo C A D; seghisi ciascuno di essi A C D, C D A per mezzo colle linee rette C E, D B, e giungansi A B, B C, C D, D E, E A, perchè dunque ciascuno di essi ACD,

Per l'ant.

2. di ques.

9. del prim.

C D A

CDA è doppio dell'angolo CAD, e sono segati per mezzo colle linee rette CE, DB, i cinque angoli DAC, ACE, ECD, CDB, BDA sono fra loro uguali, e gli angoli uguali si fermano sopra le circonferenze uguali, adunque le cinque circonferenze AB, BC, CD, DE, EA sono uguali fra loro. Ma le linee rette uguali sono poste sotto l'uguali circonferenze, onde le cinque linee rette AB, BC, CD, DE, EA fra loro sono uguali, ed il pentagono ABCDE è equilatero. Dico, che è ancora equiangolo; perchè essendo la circonferenza AB uguale alla circonferenza DE, pongasi BCD comune, sarà tutta la circonferenza ABCD uguale a tutta la circonferenza EDCB, ma sopra la circonferenza ABCD si ferma l'angolo AED, e sopra la circonferenza EDCB si ferma l'angolo BAE, adunque l'angolo BAE è uguale all'angolo AED, e per la medesima ragione ciascuno degli angoli ABC, BCD, CDE è uguale a ciascuno di essi BAE, AED, onde il pentagono ABCDE è equiangolo, e si è dimostrato essere equilatero, adunque nel dato cer-

25. del terzo.

29 del terzo.

chio

chio si è descritto un pentagono equilatero, ed equiangolo, lo che bisognava fare.

PROBLEMA XII.

PROPOSIZIONE XII.

Dintorno al dato cerchio descrivere un pentagono equilatero, ed equiangolo.

Sia il dato cerchio A B C D E, bisogna dintorno al cerchio A B C D E descrivere il pentagono equilatero, ed equiangolo. Intendansi i punti degli angoli del pentagono descritto nel cerchio A B C D E, dimodochè le circonferenze A B, B C, C D, D E, E A siano fra loro uguali, e per i punti A, B, C, D, E tirinsi le linee G H, H K, K L, L M, M G, che tocchino il cerchio, e preso il centro del cerchio ABCDE che sia F, giungansi F B, F K, F C, F L, F D, e perchè la linea retta

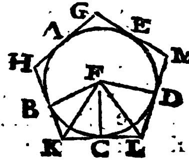
Per l'ant.

17. del terzo.

K L tocca il cerchio A B C D E nel punto C, e dal centro F al toccamento, che è al C, è tirata la linea retta F C, sarà la F C perpendicolare alla K L, gli angoli dunque al C amendue sono retti; 18. del terzo.
e per la medesima ragione gli angoli B, D sono ancora retti, e perchè l'angolo F C K è retto, il quadrato di F K è uguale a' quadrati di F C, C K, e parimente il quadrato di F K è uguale a' quadrati 47. del prim.
di F B, B K, onde i quadrati di F C, C K sono uguali a' quadrati di F B, B K, de' quali il quadrato di F C è uguale al quadrato di F B, adunque il quadrato rimanente di C K sarà uguale al quadrato di B K, e però la B K è uguale alla C K, e perchè F B è uguale alla F C, ed F K è comune, le due B F, F K sono uguali alle due C F, F K, e la base B K è uguale alla base K C, l'angolo dunque B F K è uguale all' angolo K F C, e l' angolo B K F all' angolo F K C, onde l' angolo B F C è doppio dell' angolo K F C, e l' angolo B K C doppio dell' angolo F K C, e per la medesima ragione l' angolo C F D è doppio dell' angolo C F L, e l' angolo C L D doppio dell' an- 8. del prim.

go-

golo CLF, e perchè la circonferenza BC è uguale alla circonferenza CD, l' angolo BFC sarà uguale all' angolo CFD, ed è l' an-
27. del terzo. golo BFC doppio dell' angolo KFC, e l' angolo DFC doppio dell' angolo LFC, onde l' angolo KFC è uguale all' angolo CFL, adunque sono due triangoli FKC, FLC, che hanno due angoli uguali a due angoli, l' uno all' altro, ed un lato uguale ad un lato, che ad essi è comune FC, laonde averanno gli altri lati uguali agli altri lati, e l' angolo rimanente uguale al rimanente, adun-



26. del prim. que la linea retta KC è uguale alla retta CL, e l' angolo FKC all' angolo FLC, e perchè KC è uguale a CL, sarà la KL doppia della KC, e per la medesima ragione si dimostrerà, che la HK è doppia della BK, oltre a ciò, perchè la BK si è dimostrata uguale alla KC, e la KL è doppia della KC, e la HK doppia della BK, sarà la HK uguale alla KL, e similmente ciascheduna di esse GH, GM, ML si dimostrerà uguale al-

all' una, e l' altra HK, KL, adunque il pentagono GHKLM è equilatero. Dico, che eziandío è equiangolo, perciocchè essendo l' angolo FKC uguale all' angolo FLC, e si è dimostrato, che l' angolo HKL è doppio dell' angolo FKC, e l' angolo KLM doppio dell' angolo FLC, sarà anche l' angolo HKL uguale all' angolo KLM, e si dimostrerà parimente, che ciascuno di essi KHG, HGM, GML è uguale ad amendue HK, LK, LM, adunque i cinque angoli GHK, HKL, KLM, LMG, MGH sono fra loro uguali, e però il pentagono GHKLM è equiangolo, e si è dimostrato anche, che è equilatero, ed è descritto dintorno al cerchio ABCDE, lo che bisognava fare.

PROBLEMA XIII.

PROPOSIZIONE XIII.

Nel dato pentagono, che sia equilatero, ed equiangolo descrivere un cerchio.

Sia

Sia il dato pentagono equilatero, ed equiangolo ABCDE, bisogna nel pentagono ABCDE descrivere un cerchio. Seghisi l'uno, e l'altro angolo BCD, CDE per mezzo colle linee rette CF, DF, e dal punto F, nel quale convengono fra loro CF, DF, tirinsi le linee rette FB, FA, FE. Perchè dunque la BC è uguale alla CD, e la CF comune, le due BC, CF sono uguali alle due DC, CF, e l'angolo BCF è uguale all'angolo DCF, onde la base BF è uguale alla base FD, ed il triangolo BFC è uguale al triangolo DCF, e gli altri angoli agli altri angoli, a' quali sono sottoposti i lati uguali, sarà dunque l'angolo CBF uguale all'angolo CDF, e perchè l'angolo CDE è doppio dell' angolo CDF, e l'angolo CDE è uguale all' angolo ABC, e l'angolo CDF uguale all' angolo CBF, sarà l'angolo CBA doppio dell' angolo CBF, e però l'angolo ABF è uguale all' angolo FBC, adunque l'angolo ABC è diviso per mezzo dalla linea retta BF; si dimo-

9. del prim.

mo-

mostrerà ancora, che ciascuno degli angoli BAE, AED è diviso per mezzo dalle linee rette AF, FE, onde dal punto F tirinsi alle linee rette AB, BC, CD, DE, EA le perpendicolari FG, FH, FK, FL, FM, e perchè l'angolo HCF è uguale all'angolo KCF, ed è il retto FHC uguale al retto FKC, saranno i due triangoli FHC, FKC, che hanno due angoli uguali a due angoli, ed un lato uguale ad un lato, cioè FC comune a ciascuno di essi, che è sottoposto ad uno degli angoli uguali, averanno dunque gli altri lati uguali agli altri lati, e sarà la perpendicolare FH uguale alla perpendicolare FK. Si dimostrerà eziandío, che ciascuna di esse FL, FM, FG è uguale all'una, e l'altra FH, FK, adunque le cinque linee rette FG, FH, FK, FL, FM sono fra loro uguali, e però descrivendosi un cerchio dal centro F coll'intervallo di una di esse FG, FH, FK, FL, FM, passerà eziandío per gli altri punti, e toccherà le linee rette AB, BC, CD, DE, EA, perciocchè gli angoli G, H, K, L, M sono retti, imperciocchè, se non le toccando le segherà,

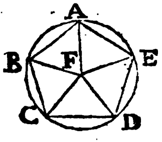
26. del prim.

rà, quella, che è tirata dalla estremità del diametro del cerchio ad angoli retti, caderà dentro al cerchio, lo che si è dimostrato essere inconveniente, onde è necessario, che le tocchi, descrivasi come GHKLM, adunque nel dato pentagono, che è equilatero, ed equiangolo, si è descritto un cerchio, lo che bisognava fare.

PROBLEMA XIV.

PROPOSIZIONE XIV.

Dintorno al dato pentagono, che sia equilatero, ed equiangolo descrivere un cerchio.



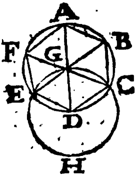
Sia il dato pentagono equilatero, ed equiangolo ABCDE, bisogna dintorno al pentagono ABCDE descrivere un cerchio. Seghisi ciascuno degli angoli BCD, CDE per mezzo colle linee rette CF, FD, e dal punto F, nel quale convengono le linee rette, tirinsi le FB, FA, FA, FE a' punti B, A, E, come nell' antecedente; si dimostrerà, che ciascuno degli angoli CBA, BAE, AED è segato per mezzo dalle linee rette BF, FA, FE, e perchè l' angolo BCD è uguale all' angolo CDE, e l' angolo FCD è la metà dell' angolo BCD, e l' angolo CDF la metà dell' angolo CDE, sarà l' angolo FCD uguale all' angolo CDF, onde il lato CF è uguale al lato FD, si dimostrerà parimente, che ciascuna FB, FA, FE è uguale a ciascuna di esse FC, FD, adunque le cinque linee rette FA, FB, FC, FD, FE sono fra loro uguali, onde dal centro F coll' intervallo di una di esse FA, FB, FC, FD, FE, descrivendosi un cerchio, passerà eziandío per gli altri punti, e sarà descritto dintorno al pentagono ABCDE, che è equilatero, ed equiangolo, descrivasi, e sia AB CDE, adunque dintorno al dato pentagono equilatero, ed equiangolo si è descritto un cerchio, lo che bisognava fare.

PRO-

PROBLEMA XV.

PROPOSIZIONE XV.

Nel dato cerchio descrivere un essagono equilatero, ed equiangolo.



Sia il dato cerchio ABCDEF, bisogna nel cerchio ABCDEF, descrivere un essagono equilatero, ed equiangolo. Tirisi il diametro AD del cerchio ABCDEF, e piglisi il centro del cerchio, che sia G, e dal centro D coll'intervallo DG, descrivasi il cerchio EGCH, e giunte EG, CG prolunghinsi ne' punti B, F, e giungansi AB, BC, CD, DE, EF, FA. Dico, che l'essagono ABCDEF è equilatero, ed equiangolo, perciocchè essendo il punto G centro del cerchio ABCDEF, la GE sarà uguale alla GD, e perchè D è centro del cerchio EGCH la DE sarà uguale alla DG, ma la GE si è dimostrata uguale alla GD, adunque la GE è uguale alla

1. del terzo.

alla E D; onde il triangolo E G D
è equilatero, e però i tre angoli
di esso E G D, G D E, D E G sono
uguali fra loro, perciocchè gli an-
goli, che sono alla base de' trian-
goli equicruri sono uguali, e sono *5. del*
i tre angoli del triangolo uguali a *prim.*
due retti, adunque l'angolo E G D *3. del*
è la terza parte di due retti, di- *prim.*
mostreremo anche, che D G C è la
terza parte di due retti, e perchè
la linea C G stando sopra la retta *13. del*
E B fa gli angoli, che sono da' la- *prim.*
ti E G C, C G B uguali a due ret-
ti, sarà il rimanente ancora C G B
la terza parte di due retti, onde
gli angoli E G D, D G C, C G B *15. del*
sono fra loro uguali, e perciò gli *prim.*
angoli, che sono alla cima di essi
B G A, A G F, F G E sono uguali
agli angoli E G D, D G C, C G B,
i sei angoli dunque E G D, D G C,
C G B, B G A, A G F, F G E sono *26. del*
fra loro uguali, ma gli angoli u- *terzo.*
guali si fermano sopra le circonfe-
renze uguali, adunque le sei cir-
conferenze A B, B C, C D, D E,
E F, F A sono uguali fra loro, ma
le linee rette uguali sono sottopo-
ste alle uguali circonferenze, onde
è necessario, che le sei linee rette
siano fra loro uguali, e però l'es-

ſagono ABCDEF è equilatero. Dico, che è ancora equiangolo, perciocchè eſſendo la circonferenza AF uguale alla circonferenza ED, pongaſi la circonferenza ABCD comune, tutta dunque la circonferenza FABCD è uguale a tutta la circonferenza EDCBA, e l'angolo FED ſi ferma ſopra la circonferenza FABCD, e l'angolo AFE ſopra la circonferenza EDCBA, adunque l'angolo AFE è uguale all'angolo DEF, ſi dimoſtreranno ancora gli altri angoli dell'eſſagono ABCDEF uguali all'uno, e l'altro di eſſi AFE, FED, onde l'eſſagono ABCDEF è equiangolo, e ſi è dimoſtrato, che è equilatero, ed è deſcritto nel cerchio ABCDEF, adunque nel dato cerchio ſi è deſcritto un eſſagono equilatero, ed equiangolo, lo che biſognava fare.

COROLLARIO.

Di quì è chiaro, che il lato dell'eſſagono è uguale al ſemidiametro del cerchio, e ſe per i punti A, B, C, D, E, F si tireranno linee rette, che tocchino il cerchio, sarà dintorno al cerchio descritto un essagono equilatero, ed equiangolo, come si è detto nel pentagono; e similmente nel dato essagono descriveremo un cerchio di dentro, e di fuori, lo che bisognava fare.

PROBLEMA XVI.

PROPOSIZIONE XVI.

Nel dato cerchio descrivere un quindecagono equilatero, ed equiangolo.

Sia il dato cerchio ABCD, bisogna nel cerchio ABCD descrivere un quindecagono equilatero, ed equiangolo. Adattisi nel cerchio ABCD il lato AC del triangolo equilatero descritto in esso, ed il lato AB del pentagono equilatero.

Di quali parti dunque il cerchio A B C D è 15. delle medesime la circonferenza A B C, essendo la terza parte del cerchio, sarà 5. e la circonferenza A B, che è la quinta parte sarà 3. la rimanente dunque B C è 2. seghisi la B C per mezzo nel punto E, onde l'una, e l'altra delle circonferenze B E, E C è la quintadecima parte del cerchio A B C D, se dunque congiungendo B E, E C accomoderemo linee rette uguali ad esse continuamente nel cerchio A B C D sarà descritto in esso un quindecagono equilatero, e equiangolo, lo che bisognava fare.

Somigliantemente dalle cose dette nel pentagono, se per le divisioni del cerchio tireremo linee rette, che lo tocchino, si descriverà dintorno ad esso un quindecagono equilatero, ed equiangolo, oltre a questo nel dato quindecagono equilatero, ed equiangolo descriveremo un cerchio di dentro, e di fuori.

Fine del Quarto Libro.

DE-

DEGLI ELEMENTI D' EUCLIDE TRADOTTI IN VOLGARE

LIBRO QUINTO.

DEFINIZIONI.

I.

La grandezza è parte della grandezza, cioè la minore della maggiore, quando la minore misura la maggiore.

II.

La grandezza maggiore è multiplice della minore, quando la minore misura la maggiore.

III.

La proporzione è una certa convenienza di due grandezze, del medesimo genere in quanto appartiene alla quantità.

IV.

Le grandezze si dicono aver proporzione fra loro, le quali moltiplicate si possono avanzare.

V.

Le grandezze si dicono essere nella medesima proporzione, la prima alla seconda, e la terza alla quarta, quando le ugualmente multiplici della prima, e della terza, ovvero insieme avanzano le ugualmente multiplici della seconda, e della quarta secondo qualsivoglia mol-

moltiplicazione, ovvero insieme le pareggiano, ovvero insieme sono avanzate da loro.

VI.

Le grandezze, che hanno la medesima proporzione, si chiamino proporzionali.

VII.

Quando delle ugualmente multiplici, la multiplice della prima avanzerà la multiplice della seconda, e la multiplice della terza non avanzerà la multiplice della quarta, allora la prima alla seconda si dirà aver maggior proporzione, che la terza alla quarta.

VIII.

L'analogía è una somiglianza di proporzioni.

IX.

L' Analogia consiste almeno in tre termini.

X.

Quando tre grandezze sono proporzionali, la prima alla terza si dirà aver doppia proporzione di quella, che ha alla seconda.

XI.

Quando quattro grandezze sono proporzionali, la prima alla quarta si dirà aver tripla proporzione di quella, che ha alla seconda, e sempre una di più, secondo che l' Analogia procederà innanzi.

XII.

Omologhe, ovvero di simil ragione sono le grandezze antecedenti alle antetecedenti, e le conſeguenti alle conſeguenti.

XIII.

La proporzione permutata è quando ſi piglia l'antecedente all'antecedente, e la conſeguente alla conſeguente.

XIV.

La proporzione converſa è quando ſi piglia la conſeguente come antecedente all'antecedente come conſeguente.

XV.

La compoſizione della proporzione è quando ſi piglia l'antecedente inſieme colla conſeguente, come una, alla conſeguente.

XVI.

La diviſione della proporzione è quando ſi piglia

glia l' eccesso, nel quale l' antecedente avanza la conseguente, ad essa conseguente.

XVII.

La conversione della proporzione è quando si piglia l' antecedente all' eccesso, nel quale l' antecedente avanza la conseguente.

XVIII.

L' ugual proporzione è quando siano più grandezze, e altre grandezze di numero uguali a quelle, che si piglino a due a due, e nella medesima proporzione; e come nelle prime grandezze la prima all' ultima, così nelle seconde grandezze la prima sia all' ultima, ovvero altramenmente, quando ſi pigliano le grandezze eſtreme levandone quelle, che ſono in mezzo.

XIX.

L'analogia ordinata è quando ſia come l'antecedente alla conſeguente, così l'antecedente alla conſeguente, e come la conſeguente ad un'altra, così la conſeguente ad un'altra.

XX.

L'analogia perturbata è quando ſiano tre grandezze, e ſiano altre grandezze di numero uguali, e come nelle prime grandezze l'antecedente alla conſeguente, così nelle ſeconde l'antecedente alla conſeguente, e come nelle prime la conſeguente ad un'altra, così nelle seconde un'altra all'antecedente.

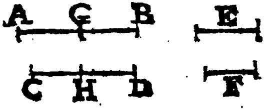
TEOREMA I.

PROPOSIZIONE I.

Se quante grandezze si vogliano siano ugualmente multiplici di quante si vogliano uguali di numero, ciascuna di ciascuna, quante volte è multiplice una grandezza di una, tante volte saranno multiplici ancor tutte di tutte.

Siano quante grandezze si vogliano AB, CD, di quante si vogliano grandezze E, F, di numero uguali, ciascuna ugualmente multiplice di ciascuna. Dico, che quante volte la AB è multiplice della E, tante volte le AB, CD sono multiplici delle E, F. Perciocchè essendo la AB ugualmente multiplice della E, e la CD della F, quante grandezze sono nella AB uguali alla

alla E, tante saranno nella CD uguali alla F, dividasi la AB in parti uguali alla E, che siano AG, GB, e la CD dividasi in parti uguali alla F, cioè CH, HD; sarà dunque la moltitudine delle parti CH, HD uguale alla moltitudine delle AG, GB, e perchè la



AG è uguale alla E, e la CH alla F, saranno ancor le AG, GH uguali alla E, F; e per la medesima ragione essendo GB uguale alla E, e la HD alla F, saranno anche GB, HD uguali alle E, F, quante dunque sono nella AB uguali alla E, tante saranno nella AB, CD uguali alla E, F, onde quante volte è multiplice la AB della E, tante volte saranno multiplici le AB, CD delle E, F, se dunque quante grandezze si vogliano siano ugualmente multiplici di quante si vogliano uguali di numero, ciascuna di ciascuna, quante volte è multiplice una grandezza di una, tante volte

sa-

saranno multiplici ancor tutte di tutte, lo che bisognava dimostrare.

TEOREMA II.

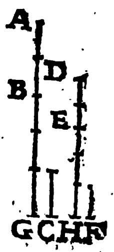
PROPOSIZIONE II.

Se la prima della seconda sia multiplice come la terza della quarta, e sia la quinta della seconda multiplice come la sesta della quarta, sarà ancor composta la prima, e la quinta della seconda multiplice, come la terza, e la sesta della quarta.

Sia la prima AB della seconda C multiplice, come la terza DE della quarta F, e sia la quinta BG della seconda C multiplice, come la sesta EH della quarta F. Dico anche composta la prima, e la quinta AG esser multiplice della seconda C, come la terza, e la sesta DH della quarta F. Perchè essendo la AB multiplice della C come la DE della F, quante gran-

dez-

dezze sono nella AB uguali alla C, tante saranno eziandío nella DE uguali alla F, e per la medesima ragione quante sono nella BG uguali alla C, tante saranno nella EH uguali alla F, quante dunque sono in tutta la AG uguali alla C, tante saranno in tutta la DH uguali alla F, onde quante volte è multiplice la AG della C, tante volte sarà la DH multiplice della F, e perciò composta la prima, e la quinta AG della seconda C sàrà multiplice come la terza, e la sesta DH della quarta F; adunque, se la prima della seconda sia multiplice come la terza della quarta, ec. sarà anche composta la prima, e la quinta multiplice della seconda, come la terza, e la sesta della quarta, lo che bisognava dimostrare.



TEOREMA III.

PROPOSIZIONE III.

Se la prima sia multiplice della seconda come

la

la terza della quarta, e si piglino le ugualmente multiplici della prima, e della terza, sarà ancora per la ugual proporzione, l'una, e l'altra delle grandezze prese ugualmente multiplice dell' una, e dell' altra, cioè l'una della seconda, e l'altra della quarta.

Sia la prima A della seconda B multiplice come la terza C della quarta D, e piglinsi le EF, GH ugualmente multiplici delle A, C. Dico, che la FE è multiplice della B come la GH della D. Perciocchè essendo la EF multiplice della A come la GH della C, quante grandezze sono nella EF uguali alla A, tante saranno anche nella GH uguali alla C. Divividasi la EF in grandezze uguali alla A, cioè EK, KF, e la GH dividasi in grandezze uguali alla C, cioè GL, LH, sarà dunque la moltitudine delle EK, KF uguale alla moltitudine delle GL, LH, e perchè la A è multiplice della B, come la C della D, e la EK è uguale alla A, e la GL alla C, sarà la EK multiplice della B, come la GL della D, e per la medesima ragione la KF sarà multiplice della B, come la LH della D. Perchè dunque la prima EK della seconda B è multiplice come la terza GL della quarta D, e la quinta KF della seconda B è multiplice, come la sesta LH della quarta D, sarà anche composta la prima, e la quinta EF della seconda B multiplice, come la terza, e la sesta GH della quarta D. Se dunque la prima sia multiplice della seconda come la terza della quarta, e si piglino le ugualmente multiplici della prima, e della terza, sarà ancora per l'ugual proporzione l'una, e l'altra delle grandezze prese ugualmente multiplice dell'una, e dell'altra, cioè l'una della seconda, e l'altra della quarta, lo che bisognava dimostrare.

TEO.

TEOREMA IV.

PROPOSIZIONE IV.

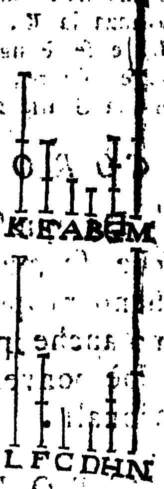
Se la prima alla ſeconda abbia la medeſima proporzione, che la terza alla quarta, e le ugualmente multiplici della prima, e della terza alle ugualmente multiplici della ſeconda, e della quarta ſecondo qualſivoglia moltiplicazione; averanno la proporzione medeſima facendoſi comparazione fra loro.

Abbia la prima A alla ſeconda B la medeſima proporzione, che la terza C alla quarta D, e piglinſi E, F in qualunque modo ugualmente multiplici delle A, C, ed altre G, H in qualunque modo ugualmente multiplici delle B, D. Dico, che la E alla G è come la F alla H. Piglinſi ancora le K, L ugualmente multiplici delle E, F,

e le

e le M, N ugualmente multiplici delle G, H; perchè dunque la E è multiplice della A, come alla F della C, e si pigliano le K, L ugualmente multiplici delle E F, sarà la K multiplice della A, come la L della G, per la medesima ragione la M sarà multiplice della B, come la N della D, e perchè come è la A alla B, così è la C alla D, e si sono prese le K, L ugualmente multiplici delle A, C, ed altre M, N in qualunque modo ugualmente multiplici delle B, D, se la K avanza la M, e la L avanzerà la N, e se è uguale, sarà uguale, e se minore, minore, e sono le K, L ugualmente multiplici delle E, F, e le M, N in qualunque modo ugualmente multiplici delle G, H: come è dunque la E alla G, così sarà la F alla H. Laonde, ec. lo che bisognava dimostrare.

Per l'ant.



Per-

Perchè dunque si è dimostrato, che se la K avanza la M, e la L avanzerà la N, e se è uguale, sarà uguale, e se minore, minore, è manifesto ancora, che se la M avanza la K, e la N avanzerà la L, e se è uguale, sarà uguale, e se è minore, minore, e però come la G alla E, così la H alla F.

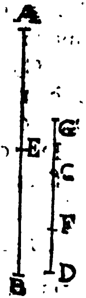
COROLLARIO.

Da questo si fa chiaro, che se quattro grandezze siano proporzionali, saranno anche per lo contrario, cioè convertendosi proporzionali.

TEOREMA V.

PROPOSIZIONE V.

Se una grandezza sia multiplice di un'altra grandezza, come la parte tratta dall'una della parte tratta dall'altra, sarà la rimanente multiplice della rimanente, come tutta di tutta.



Sia la grandezza AB multiplice della grandezza CD, come la parte tratta AE della parte tratta CF. Dico la rimanente ancora EB della rimanente FD esser multiplice, come tutta la AB di tutta la CD, perciocchè quante volte la AE è multiplice della CF, tante volte, faccia la EB multiplice della CG, e perchè la AE è multiplice della CF, come la EB della CG, sarà la AE ugualmente multiplice della CF, e la AB della GF, e si pone la AE ugualmente multiplice della CF, e la AB della CD, adunque la AB è ugualmente multiplice dell'una, e dell'altra GF, CD, e perciò la GF è uguale alla CD, traggasi la CF comune, la rimanente dunque GC è uguale alla rimanente DF, onde essendo la AE ugualmente multiplice della CF, e la EB della CG,

1. di ques.

1 com. not.

CG, è la CG uguale alla DF, sarà la AE ugualmente multiplice della CF, e la EB della FD, e si pone la AE ugualmente multiplice della CF, e la AB della CD, adunque la EB è ugualmente multiplice della FD, e la AB della CD, la rimanente dunque EB è multiplice della rimanente FD, come tutta la AB di tutta la CD, onde, ec. lo che bisognava dimostrare.

TEOREMA VI.

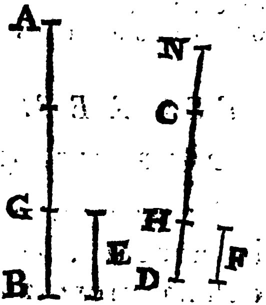
PROPOSIZIONE VI.

Se due grandezze siano ugualmente multiplici di due altre grandezze, e siano tratte da loro parti ugualmente multiplici delle medesime, saranno le rimanenti o uguali alle medesime, o ugualmente multiplici di esse.

Siano due grandezze AB, CD ugualmente multiplici di due gran- dez-

dezze E, F, e le AG, GH tratte da esse, siano ugualmente multiplici delle medesime. Dico, che le rimanenti GB, HD o sono uguali ad esse E, F, o ugualmente multiplici.

Sia primieramente la GB uguale alla E. Dico, che la HD è uguale alla F, pongasi la CN uguale alla F, e perchè la AG è ugualmente multiplice della E, e la



CH della F, ed è la GB uguale alla E, e la CN uguale alla F, sarà la AB ugualmente multiplice 1. di
della E, e la NH della F, ma si ques.
pone la AB ugualmente multiplice della E, e la CD della F, onde la NH è ugualmente multiplice della E, e la CD della F, perchè dunque ciascuna di esse NH, CD è ugualmente multiplice della F, sarà la NH uguale alla CD, traggasi la CH comune, adunque la rimanente NC è uguale alla rimanente HD, ma la NC è uguale

alla

1.com. alla F, onde eziandio la HD è
not. uguale alla F, e perciò la GB sarà uguale alla E, e la HD alla F, dimostreremo similmente, se la GB è multiplice della E, ancora la HD essere ugualmente multiplice della F, adunque se, ec. Io che bisognava dimostrare.

TEOREMA VII.

PROPOSIZIONE VII.

Le grandezze uguali alla medesima hanno la medesima proporzione, e la medesima alle uguali.

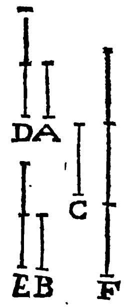
Siano grandezze ugnali A B, ed un' altra qualsivoglia grandezza C. Dico, che ciascuna di esse A, B ha la medesima proporzione alla C, e la C parimente a ciascuna di esse A, B ha la medesima proporzione. Piglinsi le D, E, ugualmente multiplici delle A, B, ed un'altra F, come si voglia multiplice della C. Perchè dunque la D è ugualmente multiplice della A, e la E della B, ed è la A uguale alla B,

sarà

ſarà eziandío la D uguale alla E, ed un'altra come ſi voglia multiplice la F. Se dunque la D avanza la F, e la E avanza eſſa F, e ſe è uguale, ſarà uguale, e ſe minore, minore, e le D, E ſono ugualmente multiplici delle A, B, e l'altra F come ſi voglia multiplice della C; ſarà dunque come la A alla C, così la B alla C. Dico oltre a ciò la C aver la medeſima proporzione all'una, e l'altra di eſſe A, B, perciocchè facendoſi le medeſime coſe, dimoſtreremo ſimilmente la D eſſer uguale alla E, e un'altra eſſer la F, onde ſe la F avanza la D, avanzerà ancora la E, e ſe è uguale, ſarà uguale, e ſe minore, minore, e la F è multiplice della C, e altre D, E in qualſivoglia modo ugualmente multiplici delle A, B, adunque come è la C alla A, così ſarà la C alla B, onde, ec. lo che biſognava dimoſtrare.

1. com. not.

Def. 5.



Def. 5.

TEOREMA VIII.

PROPOSIZIONE VIII.

Delle grandezze disuguali la maggiore alla medesima ha maggior proporzione, che la minore, e la medesima alla minore ha maggior proporzione, che alla maggiore.

Siano AB, C, grandezze disuguali, e sia la A B maggiore, ed un' altra D sia comunque si voglia. Dico, che la A B ha maggior proporzione alla D, che la C alla D, e la D ha maggior proporzione alla C, che alla AB. Perciocchè essendo la A B maggiore della C, pongasi la B E
Def. 4. uguale alla C, onde la minor di esse A E, E B multiplicata, sarà alla fine maggiore del-

della D; sia prima la AE minore della EB, e moltiplichisi la AE fin tanto, che si faccia maggiore della D, e sia la FG multiplice della AE, la quale sia maggiore della D, e quante volte la FG è multiplice della AE, tante volte si faccia multiplice la GH della EB, e la K della C, e piglisi la L doppia della D, e la M tripla, e sempre una più, fin che quella, che si piglia, sia fatta multiplice della D, e primieramente maggiore della K. Piglisi, e sia la N quadrupla della D, e primieramente maggiore della K. Perchè dunque la K, è primieramente minore della N, non sarà la K minore della M; ed essendo la FG ugualmente multiplice della AE, e la GH della EB, sarà ancora la FG ugualmente multiplice della AE, e la FH della AB, e la FG ugualmente multiplice della AE, e la K *1. di quest.* della C, adunque la FH è ugualmente multiplice della AB, e la K della C; e perciò le FH, K saranno ugualmente multiplici delle AB, C, oltre a ciò, perchè la GH è ugualmente multiplice della EB, e la K della C, ed è la EB *1. com. not.* uguale alla C, sarà anche la GH

M 2 ugua-

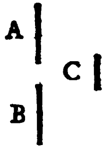
uguale alla K, ma la K non è minore della M, adunque la GH non è minore della M, ma la FG è maggiore della D, onde tutta la FH sarà maggiore di amendue D, M, ma amendue D, M sono uguali alla N; perciocchè la M è tripla della D, ed amendue M, D sono quadruple della D, e la N è quadrupla della D, adunque amendue M, D sono uguali alla N, ma la FH è maggiore della M, D, onde la FH avanza la N, ma la K non avanza la N, e sono FH, K ugualmente multiplici delle AB, C, ed un' altra N comunque si voglia multiplice della D, adunque la AB ha maggior proporzione alla D, che la C alla D. Dico ancora la D alla C aver

maggior proporzione, che la D alla AB, perciocchè facendosi le medesime cose similmente dimostreremo la N avanzare la K, e non avanzare la FH, ed è la N multiplice della D, e le FH, K altre in qualunque modo ugualmente multiplici delle A B, C, adunque la D ha maggior proporzione alla C, che la D alla A B. Ma sia la A E maggiore della E B, sarà la minore E B moltiplicata alla fine maggiore della D, multiplichisi, e sia la G H multiplice della E B, e maggiore della D, e quante volte la G H è multiplice della E B, tante volte facciasi la F G multiplice della A E, e la K della C, dimostreremo similmente le F H, K essere ugualmente multiplici delle A B, C, piglisi poi la N multiplice della D, e primieramente maggiore della F G, adunque la F G non è minore della M, ed è la F G maggiore della D, onde tutta la F H avanza la D, M, cioè la N, e la K non avanza la N, perchè la F G essendo maggiore della G H, cioè della K non avanza la N, e similmente finiremo la dimostrazione come di sopra, adunque, ec. lo che bisognava dimostrare.

TEOREMA IX.

PROPOSIZIONE IX.

Quelle grandezze, che alla medesima hanno la medesima proporzione, sono uguali fra loro, e quelle, alle quali la medesima ha la medesima proporzione, sono ancora fra loro uguali.



Abbia ciascuna delle A, B la medesima proporzione alla C. Dico, che la A è uguale alla B. Perchè, se non fosse uguale, non averebbe ciascuna di esse A, B la medesima proporzione alla C, ma l' hanno, adunque la A,è uguale alla B. Abbia oltre a ciò la C la medesima proporzione a ciascuna di esse A, B. Dico, che la A è uguale alla B, e se non è così, la C non avrà la medesima proporzione a ciascuna di esse A, B, ma ha la me-

Per l' ant.

Per l' ant.

de-

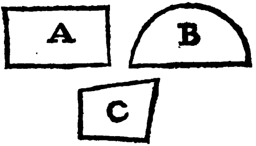
desima, adunque la A necessariamente è uguale alla B, onde, ec. lo che bisognava dimostrare.

TEOREMA X.

PROPOSIZIONE X.

Delle grandezze, che hanno proporzione alla medesima, quella, che ha maggior proporzione è maggiore; e quella, alla quale la medesima ha maggior proporzione, è minore.

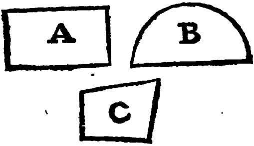
Abbia la A alla C maggior proporzione, che la B alla C. Dico,



che la A è maggiore della B. Perciocchè, se non è maggiore, o sarà uguale, o minore, ma non è uguale la A alla B, perciocchè ciascuna di esse A, B averebbe la me- 7. di ques.

 de-

desima proporzione alla C: ma non l' hanno, adunque l' A non è uguale alla B; ma nè anche la A è minore della B, perche la A averebbe minor proporzione alla C, che la B, ma non l' ha minore, onde la A non è minore della B,
8. di ques. e si è dimostrato, che non è anche uguale, adunque sarà la A maggiore della B, oltre a ciò abbia la C maggior proporzione alla B, che la C alla A. Dico, che la B è mi-



nore della A, e se non è minore o sarà uguale, o maggiore; ma la B non è uguale alla A, perchè la C averebbe la medesima proporzione a ciascuna di esse A, B, e non l' ha, adunque la A non è uguale alla B; ma nè anche la B è
7. di ques. maggiore della A, perchè la C averebbe minor proporzione alla B, che alla A; e non l' ha, non è dunque la B maggiore della A, e
8. di ques. si è dimostrato, che non è anche uguale, e però la B sarà minore del-

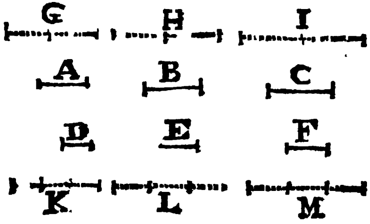
della A, adunque, ec. lo che bisognava dimostrare.

TEOREMA XI.

PROPOSIZIONE XI.

Quelle proporzioni, che sono le medesime ad una medesima, sono ancora le medesime fra loro.

Sia come l'A alla D, così la B alla E, e come la B alla E, così la C alla F. Dico come è la A alla D, così essere la C alla F.



Piglinsi le G, H, I ugualmente multipliplici delle A, B, C. ed altre K, L, M in qualsivoglia modo ugualmente multiplici delle D, E, F. Perchè dunque come è la

A alla D, così è la B alla E, e si son prese delle A, B le G, H ugualmente multiplici, e delle D, E altre in qualunque modo ugualmente multiplici K, L, se la G avanza la K, e la H avanzerà la L, e se è uguale, sarà uguale, e se minore, minore. E perchè come è la B alla E, così è la C alla F, e si son prese le H, I ugualmente multiplici delle B, C, e delle E, F, altre in qualsivoglia modo ugualmente multiplici L, M, se la H avanza la L, anco la I avanzerà la M, e se è uguale, sarà uguale, e se è minore, minore. Ma se la H avanza la L, anco la G avanzerà la K, e se è minore, sarà minore, e se è uguale, uguale, e sono le G I ugualmente multiplici delle A, C, e la K, M in qualsivoglia modo ugualmente multiplici delle D, F. Adunque come è la A alla D, così e la C alla F, e perciò, ec. lo che bisognava dimostrare.

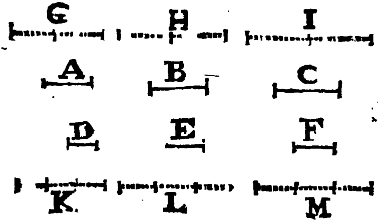
Conversa della 5. def.

TEOREMA XII.

PROPOSIZIONE XII.

Se quante grandezze si vogliano siano proporzionali, li, come una dell' antecedenti a una delle conſeguenti, così ſaranno tutte le antecedenti a tutte le conſeguenti.

Siano quante grandezze ſi vogliono proporzionali A, D, B, E, C, F, e come A a D, così ſtia B ad E, e C ad F. Dico come è la A alla D, così eſſere le A, B, C alle D, E, F. Piglinſi delle A, B, C le ugualmente multiplici G, H,



I, e delle D, E, F, altre in qualunque modo ugualmente multiplici K, L, M. Perchè dunque come è la A alla D, così è la B alla E, e la C alla F, e delle antecedenti A, B, C ſi ſon preſe le G, H, I ugualmente multiplici,

 e del-e delle conseguenti D, E, F altre in qualunque modo ugualmente multiplici K, L, M; se la G avanza la K, e la H avanzerà la L, e la I la M; e se è uguale, saranno uguali, e se minore, minori. Onde se la G avanza la K, e le G, H, I avanzeranno la K, L, M, e se è minore, saranno minori, e se uguale, uguali, e sono le G, e G, H, I ugualmente multiplici delle A, ed A, B, C, e sono le K, e K, L, M in qualsivoglia modo ugualmente multiplici delle D, e D, E, F. Adunque come la A alla D, così le A, B, C alle D, E, F. Laonde, ec. lo che bisognava dimostrare.

Conversa della 5. def.

1. di quest.

TEOREMA XIII.

PROPOSIZIONE XIII.

Se la prima alla seconda abbia la medesima proporzione, che la terza alla quarta, e la terza alla quarta abbia maggior proporzione, che la quinta alla sesta, ancora la prima al-

la

la ſeconda averà maggior proporzione, che la quinta alla ſeſta.

Converſa della 7. def. 8. *di queſ.*

La prima A abbia la medeſima proporzione alla ſeconda B, che la terza C alla quarta D, e la terza C abbia maggior proporzione alla quarta D, che la quinta E alla ſeſta F. Dico, che la prima A ha maggior proporzione alla ſeconda B, che la quinta E alla ſeſta F. Perciocchè avendo la C maggior proporzione alla D, che la E alla F, ſono alcune grandezze ugualmente multiplici delle C, E, ed altre in qualunque modo ugualmente multiplici delle D, F, delle quali la multiplice della C avanza la multiplice della D, e la multiplice della E non avanza la multiplice della F, piglinſi, e ſiano G, H ugual-

ugualmente multiplici delle C, E, e delle D, F altre in qualunque modo ugualmente multiplici O, L, dimodochè la G avanzi la O, ma H non avanzi la L, e quante volte la G è multiplice della C, tante volte la M sia multiplice della A: e quante volte la O è multiplice della D, tante volte sia multiplice la N della B, e perchè come è la A alla B, così è la C alla D, e si sono prese delle A, C le M, G ugualmente multiplici, e delle B, D altre in qualunque modo ugualmente multiplici N, O, se la M avanza la N, e la G avanzerà la O, e se è uguale, sarà uguale, e se minore, minore, ma la G avanza la O, adunque la M avanzerà la N, ma la H non avanza la L, e sono le M, H ugualmente multiplici delle A, E, e le N, L delle B, F, altre in qualunque modo ugual-

Conversa della 5. def.

gualmente multiplici, onde la A averà maggior proporzione alla B, che la E alla F. Se dunque, ec. lo che bisognava dimostrare.

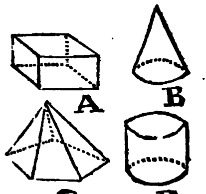
TEOREMA XIV.

PROPOSIZIONE XIV.

Se la prima alla seconda abbia la medesima proporzione, che la terza alla quarta, e sia la prima maggiore della terza, sarà anche la seconda maggiore della quarta, e se uguale, uguale, e se minore, minore.

La prima A abbia la medesima proporzione alla seconda B, che la terza C alla quarta D, e sia la A maggiore della C. Dico, che ancora la B sarà maggiore della D: perciocchè essendo la A maggiore della C, ed un'altra grandezza in qualunque modo B, averà la A alla B maggior proporzione, che la C alla B, ma come la A alla B, 8. di ques.
così

Per l'ant 10. di quest. così la C alla D, adunque anche la C averà maggior proporzione alla D, che la C alla B, e quella, alla quale la medesima ha maggior proporzione, è minore, onde la D è minore della B, e perciò la B è



maggiore della D, dimostreremo similmente se la A è uguale alla C, la B ancora esser uguale alla D, e se la A è minore della C, la B ancora esser minore della D, adunque, ec. lo che bisognava dimostrastrare.

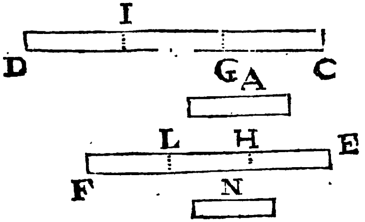
TEOREMA XV.

PROPOSIZIONE XV.

Le parti di quelle grandezze, che sono multiplici nel medesimo modo, facendosi comparazione fra loro, hanno la medesima proporzione.

Sia

Sia la CD multiplice della A, come la EF della N. Dico, che come è la A alla N, così è la CD alla EF. Perciocchè essendo la DC multiplice della A, come



la FE della N, quante grandezze sono nella CD uguali alla A, tante saranno nella EF uguali alla N. Dividasi la CD in grandezze uguali alla A, che siano DI, IG, GC, e la EF dividasi in grandezze uguali alla N, cioè FL, LH, HE. Sarà dunque la moltitudine delle DI, IG, GC uguale alla moltitudine delle FL, LH, HE. E perchè sono DI, IG, GC uguali, e sono FL, LH, HE fra loro uguali, come la DI alla FL, così sarà la IG alla LH, e la GC alla HE, e come 12. *di*
uno degli antecedenti a uno de' con- *quest.*
se-

ſeguenti, così tutti gli antecedenti a tutti i conſeguenti; dunque come è DI ad FL, così ſarà DC ad FE; ma la DI è uguale alla A, e la FL alla N, dunque come la A alla N, così la DC alla FE. Le parti dunque, ec. lo che biſognava dimoſtrare.

TEOREMA XVI.

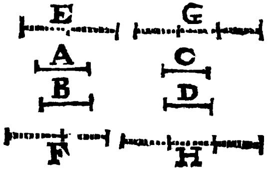
PROPOSIZIONE XVI.

Se quattro grandezze ſiano proporzionali, ſaranno ancora permutandoſi proporzionali.

Siano quattro grandezze proporzionali A, B, C, D, e ſia come la A alla B, così la C alla D. Dico, che ancora permutandoſi ſono proporzionali, cioè che come la A alla C, così è la B alla D. Piglinſi le E, F ugualmente mu tiplici delle A, B, e delle C, D altre in qualunque modo ugualmente multiplici G, H, perchè dunque la E è ugualmente multiplice della A, e la F della B, e le parti *delle* grandezze, che ſono multiplici nel

me-

medesimo modo facendosi comparazione fra loro, hanno la medesima proporzione, sarà come la A alla B, così la E alla F; ma come è la A alla B, così è la C alla D, adunque come è la C alla D, così è la E alla F, e perchè le G, H sono ugualmente multiplici delle C, D, e le parti delle grandezze, che sono multiplici nel medesimo modo, facendosi compara-



zione fra loro, hanno la medesima proporzione, sarà come la C alla D, così la G all'H, ma come la C alla D, così la E alla F, adunque come è la E alla F, così è la G alla H; ma se quattro grandezze siano proporzionali, e la prima sia maggiore della terza, sarà anche la seconda maggiore della quarta, e se è uguale, uguale, e se minore, minore; e sono le E, F ugualmente multiplici delle A, B, e le G, H altre in qualunque modo ugualmente multiplici delle C, D, onde come la A alla C, così sarà la B alla D, se dunque quattro grandezze siano pròporzionali, saranno ancora permutandosi proporzionali, lo che bisognava dimostrare.

TEOREMA XVII.

PROPOSIZIONE XVII.

Se quattro grandezze a due a due omogenee saranno composte proporzionali, e dividendole saranno proporzionali.

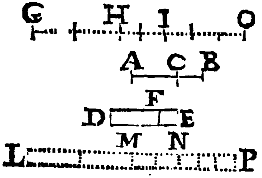
Sieno due grandezze omogenee, e composte insieme A B. B C, ed altre due pur omogenee, e composte insieme D E, E F, e sien tra loro proporzionali, cioè come A B a B C, così D E ad E F. Dico, che dividendole, anco A C a C B sta come D F ad F E.

Prendansi delle A C, C B, e delle D F, F E le G H, H I, e le L M, M N ugualmente multiplici secondo un medesimo qualunque nume-

me-

mero, ed inoltre delle CB, FE ſi prendano le ugualmente multiplici IO, NP, pur ſecòndo uno ſteſſo qualunque numero.

Perchè dunque la HI è multiplice di CB, come la MN di FE, il numero delle CB nella HI sarà uguale al numero delle FE nella MN. Similmente, perchè IO è

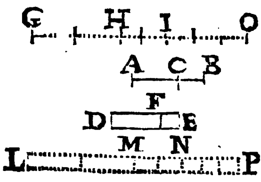


multiplice di CB, come NP di FE, il numero delle medeſime CB nella IO ſarà uguale al numero delle FE nella NP. Se dunque il numero in HI è uguale al numero in MN, ed il numero in IO al numero in NP, tutto il numero delle CB in HO, ſarà uguale a tutto il numero della FE in MP. Onde le HO, MP ſono ugualmente multiplici delle CB, FE.

E perchè GH è multiplice di AC, come HI di CB, ſarà il compoſto GI multiplice del compoſto

AB,

AB, come una di una, cioè come GH di AC, ovvero come LM di DF, cioè come MN di FE, ovvero come il composto LN del composto DE. Ma sta come la prima AB alla seconda BC, così la terza DE alla quarta EF, e della prima, e della terza si son provate ugualmente multiplici le GI,



LN, e della seconda, e della quarta si provarono di sopra ugualmente multiplici le HO, MP, adunque l' ugualmente multiplici della prima, e della terza saranno concordi coll' ugualmente multiplici della seconda, e della quarta; cioè se GI è uguale ad OH, anco LN sarà uguale ad MP, e se è maggiore, maggiore, e se é minore, minore: onde tolte le parti comuni HI, NM, anco il residuo GH s'accorderà col residuo IO, como il residuo LM col residuo NP in

pa-

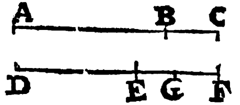
pareggiarsi o in avanzare, o in mancare: e però considerata AC come prima grandezza, CB come seconda, DF come terza, ed FE come quarta, essendosi prese le GH, LM, ugualmente multiplici della prima, e della terza, e le IO, NP ugualmente multiplici della seconda, e della quarta, e dimostrato, che quella della prima concorda con quella della seconda, come quella della terza con quella della quarta, starà la prima alla seconda come la terza alla quarta, cioè la AC alla CB, come la DF alla FE. E però quando le grandezze sono composte proporzionali, e dividendole sono ancora proporzionali, lo che bisognava dimostrare.

TEOREMA XVIII.

PROPOSIZIONE XVIII.

Se le grandezze divise siano proporzionali, saranno ancora composte proporzionali.

Siano le grandezze divise proporzionali A B, B C, D G, G F, e come la A B alla B C, così la D G alla G F. Dico, che composte ancora saranno proporzionali, cioè, che come la A C alla C B, così è la D F alla FG. Perciocchè, se non è come la A C alla C B, così la D F alla F C

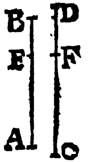


sarà come la A C alla C B, così DF o a una minore della F G, o ad una maggiore. Sia prima a una maggiore, cioè alla F E. E perchè come la AC alla C B, così D F ad F E sono le grandezze composte proporzionali, adunque ancora divise saranno proporzionali, e perciò come la A B alla B C, così la D E alla E F, adunque eziandío come la D G al-alla G F, così la D E alla E F. Ma la prima D G è maggiore della terza D E, onde la seconda G F sarà maggiore della quarta E F, ma è minore, che è impossibile. Non è dunque come la A C alla C B, così la D F alla F E. Dimostreremo parimente, che non è alla minore di F G. Adunque è necessario, che sia alla G F, onde, ec. lo che bisognava dimostrare. *TEO-*

TEOREMA XIX.

PROPOSIZIONE XIX.

Se sia come tutta a tutta, così una parte tratta ad una parte tratta, sarà ancora la rimanente alla rimanente, come tutta a tutta.



Sia come tutta A B a tutta C D, così la parte tratta A E alla parte tratta C F. Dico, che la rimanente E B è alla rimanente F D, come tutta AB a tutta CD. Perciocchè essendo come tutta A B a tutta C D, così la A E alla C F, sarà eziandío permutandosi come la B A alla A E, così la D C alla C F, e perchè le grandezze composte sono proporzionali, e divise ancora saranno proporzionali, adunque come la B E alla E A, così la D F alla F C, e similmente permutandosi come la B E alla D F, così la E A alla F C,

16. di ques.

17. di ques.

ma come la AE alla CF, così fu posta essere la AB alla CD, la rimanente dunque EB sarà alla rimanente FD, come tutta AB a tutta CD, onde, ec. lo che bisognava dimostrare.

E perchè si è dimostrato, che come la AB alla CD, così è la EB alla FD, sarà permutandosi come la AB alla BE, così la CD alla DF; adunque le grandezze composte sono proporzionali, ma si è dimostrato come la BA alla AE, così la DC alla CF, lo che è per la conversione della proporzione.

COROLLARIO.

Da questo è chiaro, se le grandezze composte siano proporzionali, eziandío per la conversione della proporzione, saranno proporzionali.

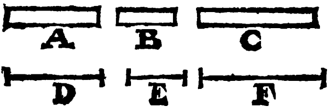
TEOREMA XX.

PROPOSIZIONE XX.

Se ſiano tre grandezze, e ſiano altre grandezze di numero uguali a quelle, che ſi pigliano a due a due, e nella medeſima proporzione, e per la proporzione uguale, la prima ſia maggiore della terza, ſarà ancora la quarta maggiore della ſeſta; e ſe uguale, uguale, e ſe minore, minore.

Siano tre grandezze A, B, C, ed altre ad eſſe uguali di numero D, E, F, preſe a due a due, e nella medeſima proporzione, e ſia come la A alla B, così la D alla E, e come la B alla C, così la E alla F, ma per l'ugual proporzione ſia maggiore la A della C. Dico, che la D è maggior della F, e ſe uguale, uguale, e ſe minore, minore. Perciocchè eſſendo la A maggior della C, ed un' altra in qualunque modo B, e la maggiore alla medeſima ha maggior proporzione, che la minore; averà la A maggior proporzione alla B, che la C alla B, ma come la A alla B, così la D alla E, e

8. di queſ.



convertendoſi come la C alla B, così la F alla E, adunque ancor la D alla E ha maggior proporzione, che la F alla E, ma delle grandezze, che hanno proporzione alla medeſima, quella, che ha maggior proporzione è maggiore, onde la D è maggiore della F, dimoſtreremo ſimilmente, ſe la A ſia uguale alla C, e la D eſſere uguale alla F, e ſe minore, minore, adunque, ec. lo che biſognava dimoſtrare.

10. di queſ.

TEOREMA XXI.

PROPOSIZIONE XXI.

Se ſiano tre grandezze, e ſiano altre grandezze di numero uguali a quelle, che ſi piglino a due a due, e nella medeſima proporzione, e ſia l'analogia loro perturbata, e per l'ugual proporzione la prima ſia maggiore della terza; ſarà ancora la quarta maggiore della ſeſta, e ſe uguale, uguale, e ſe minore, minore.

Siano tre grandezze proporzionali A, B, C, ed altre di numero uguali a quelle D, E, F, preſe a due a due, e nella medeſima proporzione, e ſia la loro analogia perturbata, cioè come è la A alla B, così ſia la E alla F, e come la B alla C, così la D alla E, e per l' ugual porzione la A

sia maggiore della C. Dico, che ancora la D è maggiore della F, e se uguale, uguale, e se minore, minore, perciocchè essendo la A
8. di ques. maggiore della C, ed un' altra B averà la A maggior proporzione alla B, che la C alla B; ma come è la A alla B, così è la E alla F, e con-

10. di ques. vertendosi come la C alla B, così la E alla D, onde la E averà maggior proporzione alla F, che la E alla D, ma quella alla quale la medesima ha maggior proporzione, è minore, adunque la F è minore della D, e perciò la D sarà maggiore della F. Dimostreremo similmente, se la A sia uguale alla C, e la D essere uguale alla F, e se minore, minore, laonde, ec. lo che bisognava dimostrare.

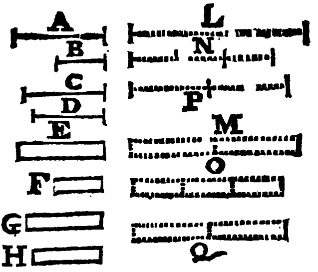
TEOREMA XXII.

PROPOSIZIONE XXII.

Se siano quante grandezze si vogliano, e siano al-

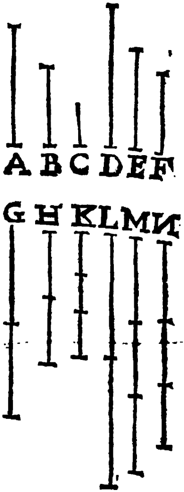
altre grandezze di numero uguali a quelle, che si pigliano a due a due nella medesima proporzione, saranno ancora per la proporzione uguale nella medesima proporzione.

Siano quante grandezze si vogliano A, B, C, e altre di numero uguali a quelle E, F, G, prese a due a due nella medesima proporzione, e sia come la A alla B,



così la E alla F, e come la B alla C, così la F alla G. Dico per la proporzione uguale essere nella medesima proporzione, cioè come è la A alla C, così essere la E alla G. Piglinsi delle A, E ugual-

 men-alla F; e come la B alla C, così la D alla E. Dico come è la A alla C, così essere la D alla F. Piglinsi le G, H, K ugualmente multiplici delle A, B, C, e delle D, E, F, altre in qualunque modo ugualmente multiplici L, M, N, e perchè le G, H sono ugualmente multiplici delle A, B, e le parti delle multiplici nel medesimo modo hanno la medesima proporzione, sarà come la A alla B, così la G alla H, e per la medesima ragione come la E alla F, così la M alla N, ed è come la A alla B, così la E alla F, come dunque la G alla H, così la M alla N, e perchè come è la B alla C, così è la D alla E, e si sono prese H, L ugualmente multiplici delle B, D, e delle C, E, altre in qualsivoglia modo ugualmente multiplici K, M, sarà come la H alla K,



così

nore; e ſono le L, M ugualmente multiplici delle A, E, e le P, Q, altre in qualſivoglia modo ugualmente multiplici delle C, G. Onde come la A alla C, così la E alla G, ſe dunque, ec. lo che biſognava dimoſtrare.

TEOREMA XXIII.

PROPOSIZIONE XXIII.

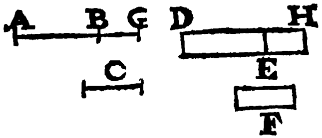
Se ſiano tre grandezze, e ſiano altre grandezze di numero uguali a quelle, che ſi piglino a due a due nella medeſima proporzione, e ſia l'analogia loro perturbata, saranno ancora per la proporzione uguale nella medeſima proporzione.

Siano tre grandezze A, B, C, e altre grandezze di numero uguali a quelle preſe a due a due nella medeſima proporzione D, E, F, e ſia la loro analogia perturbata, e come è la A alla E, così ſia la E

alla

ſeſta alla quarta, averà ancor compoſta la prima, e la quinta alla ſeconda la medeſima proporzione, che la terza, e la ſeſta alla quarta.

Abbia la prima AB alla ſeconda C, la medeſima proporzione, che la terza DE alla quarta F,



ed abbia la quinta BG alla ſeconda C la medeſima proporzione, che la ſeſta EH alla quarta F. Dico, che compoſta la prima, e la quinta AG alla ſeconda C, ha la medeſima proporzione, che la terza, e la ſeſta DH alla quarta F. Perciocchè eſſendo come la BG alla C, così la EH alla F, ſarà, convertendoſi, come la C alla BG, così la F alla EH, e perchè come la la AB alla C, così la DE alla F, e come la C alla BG, così la F alla EH, sarà per la proporzione uguale come la AB alla BG, così la DE alla EH, ed essendo le grandezze divise proporzionali, saranno ancor composte proporzionali, come dunque è la AG alla GB, così è la DH alla HE, ma come la GB alla C, così la EH alla F, adunque per la ugual proporzione come è la AG alla C, così sarà la DH alla F, onde, ec. lo che bisognava dimostrare.

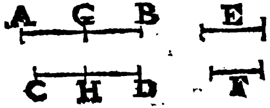
TEOREMA XXV.

PROPOSIZIONE XXV.

Se quattro grandezze siano proporzionali, la maggiore di tutte, e la minore saranno maggiori delle due rimanenti.

Siano quattro grandezze proporzionali AB, CD, EF, e sia come la AB alla CD, così la E alla F: e sia la maggiore di tutte AB, e la minore F. Dico le AB es-

F esser maggiori delle CD, E. Pongasi la AG uguale alla E, e la CH uguale alla F. Perchè dunque come la AB alla CD, così la E alla F, ed è la AG uguale alla E, e la CH uguale alla F; sarà come la AB alla DC, così la AG alla CH, e perchè come tutta AB a tutta CD, così la parte
19. di ques. tratta AG alla parte tratta CH, sarà ancor la rimanente GB alla rimanente HD, come tutta AB a



tutta CD, ed è la AB maggiore della CD, adunque la GB è maggiore della HD, ed essendo la AG uguale alla E, e la CH alla F, saranno le AG, F uguali alle CH, E, ma se alle cose
4. com. not. disuguali s'aggiungano cose uguali, tutte saranno disuguali, adunque essendo le GB, HD disuguali, percioechè la GB è maggiore, se alla GB si aggiungano le AG, F, ed alla HD si aggiungano CH,
E, si